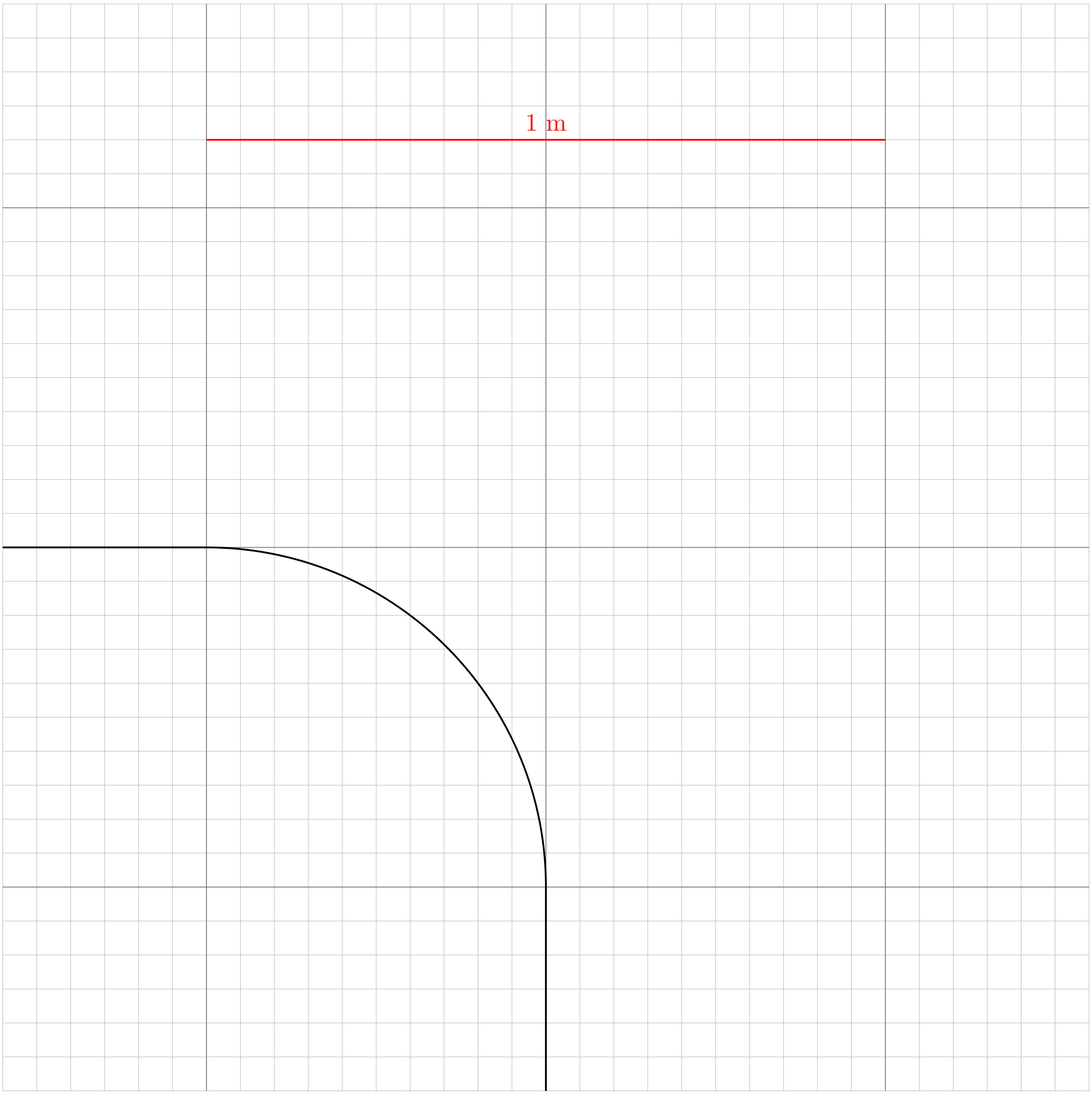
Ritenis **8 punkti**



A Riteņbraucējs Viesturs izdomāja atrast savas aizmugurējās riepas centra trajektoriju kustības laikā(melnā līnija — aizmugurējā riteņa viduspunkta trajektorija). Ir zināms, ka aizmugurējās riepas centra ātrums ir nemainīgs un vienāds ar $|\vec{v}| = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$. Riteņi neizslīd. Novērtēt minimāli iespējamo miera berzes koeficientu starp riepām un ceļu μ, ja Viestura velosipēda garums ir $L = 2\,\mathrm{m}$ un $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.
8 punkti

Kā var redzēt uzdevumam pieliktajā zīmējumā, Viestura velosipēda aizmugurējās riepas trajektorija ir ceturtdaļa no riņķa līnijas ar rādiusu $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$, ko var noteikt no attēla. No šī mēs varam izspriest, ka Viestura velosipēds izdara pagriezienu kustības laikā. Tā kā uz velosipēdu darbojas tikai gravitācija un berzes spēki mēs varam uzrakstīt spēku vienādojumu($F_{(berze)\geq m\cdot a_{\text{centrtieces}}}$) no kā var izspriest sekojošo:

$$\mu \geq \frac{v_{\mathrm{cm}}^2}{gr'}$$

Kur v_{cm} ir velosipēda masas centra ātrums un r' ir šī paša masas centra apgriešanas rādiuss. Tā kā velosipēds ir viens objekts, tā rotācijas cikliskai frekvencei ir jābūt vienādai visos objekta punktos, kas ļauj mums atrast ω, izmantojot aizmugurējās riepas centru, kuras ātrumu un rotācijas rādiusu mēs zinam:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1,5}{0.5} = 3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Atliek tikai atrast velosipēda masas centra rotācijas rādiusu r', bet tā kā velosipēda rāmis ir paralēls tā aizmugurējā riteņa trajektorijas pieskarei, kura savukārt ir perpendikulāra vektoram $\vec{r}$(pieskare), izveidojās taisnleņķa trijstūris, kura hipotenūza ir mūsu nezināmais masas centra apgriešanas rādiuss:

$$r' = \sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = 1{,}12\,\mathrm{m}$$

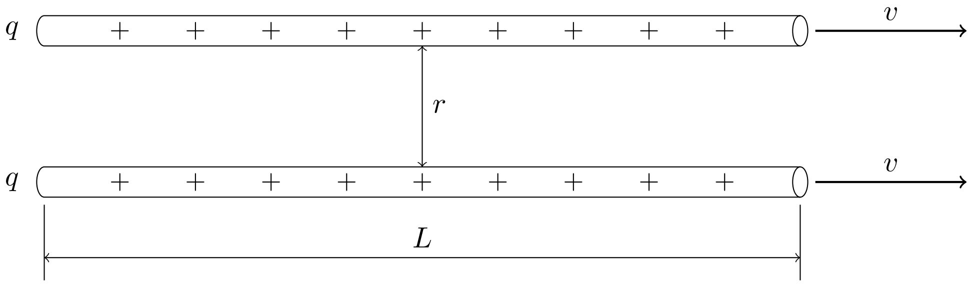
Ievietojot šo mūsu spēku vienādojumā mēs iegūstam sekojošo rezultātu:

$$\mu \geq \frac{\omega^2 \cdot r'}{g} = 1{,}03$$

Tas ir viss.

Divi stienīši 12 punkti

Tukšā telpā atrodas divi gari stienīši. Abiem stienīšiem ir vienāds lādiņš q un garums L. Pieņemt, ka tiek apskatīts bezgalīgi īss laika brīdis, kurā var pieņemt, ka attālums starp stienīšiem r paliek nemainīgs.



A Apskatīsim atskaites sistēmu, kurā abi stienīši ir nekustīgi.

A1 Aprēķiniet spēka moduli un noteiciet tā virzienu, ar kuru viens no stienīšiem mijiedarbojas ar otro. *2 punkti*

Ņemot vērā to, ka stienīši ir gari, elektriskais lauks no viena stienīša ir vērsts tam perpendikulāri. Apskatīsim cilindrisku Gausa virsmu, kuras ass sakrīt ar vienu no stienīšiem, bet rādiuss ir r.
$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$, no kurienes $2\pi rhE = \frac{h\lambda}{\epsilon_0}$, kur $\lambda = \frac{q}{L}$ un h ir cilindriskās virsmas augstums. Tad $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{q}{Lr}$, no kurienes $F_E = Eq = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{Lr}$ Šis spēks atgrūž stienīšus vienu no otra, jo tie ir abi pozitīvi lādēti.

B Apskatīsim laboratorijas atskaites sistēmu, kurā abi stienīši kustas ar vienādu ātrumu $v \ll c$.

B1 Aprēķiniet spēka moduli un noteiciet tā virzienu, ar kuru viens no stienīšiem mijiedarbojas ar otro. *3 punkts*

Šajā gadījumā elektrostatiskā mijiedarbība paliek, bet tai pievienojas Lorenca spēks. Apskatīsim riņķveida Ampēra cilpu ar rādiusu r, kas ir perpendikulāra stienīšiem un kuras centrs pieder vienam no stienīšiem:
$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I$. Tad $2\pi rB = \mu_0 I$.
Izteiksim strāvu: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lambda \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lambda v = \frac{q}{L}v$.
Ieliksim šo iepriekšējā izteiksmē: $2\pi rB = \mu_0\frac{q}{L}v$, no kurienes $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{qv}{Lr}$.
$F_B = qvB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q^2v^2}{Lr}$. Tā kā abas strāvas ir vērstas uz vienu pusi, Lorenca spēks pievelk stienīšus vienu otram.
Tad summārais spēks, kas darbojas starp stienīšiem, ir: $F_1 = F_E - F_B = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{Lr} - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q^2v^2}{Lr}$

B2 Aprēķiniet punktu B1 vispārīgā gadījumā (bez pieņēmuma, ka $v \ll c$). *3 punkti*

Ņemsim vērā relativitātes efektus, tas ir, garuma saīsinājumu $L' = \frac{L}{\gamma}$, kur $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ir Lorenca faktors.
$F_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{q^2\gamma}{Lr} - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q^2v^2\gamma}{Lr} = \frac{q^2\gamma}{2\pi Lr}(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 v^2)$. Izdalot abas puses ar μ_0, iegūst
$\frac{F_2}{\mu_0} = \frac{q^2\gamma}{2\pi Lr}(\frac{1}{\epsilon_0\mu_0} - v^2)$. Bet ir zināms, ka gaismas ātrumu var izteikt ar citām konstantēm: $\frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = c^2$.
Tātad, iepriekšējo izteiksmi var pārrakstīt veidā $\frac{F_2}{\mu_0} = \frac{q^2\gamma}{2\pi Lr}(c^2 - v^2)$. Izdalot abas puses ar c^2, iegūšt
$\frac{F_2}{\mu_0 c^2} = \frac{q^2\gamma}{2\pi Lr}(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{q^2}{2\pi Lr\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{q^2}{2\pi Lr\gamma}$, no kurienes $F_2 = \frac{q^2\mu_0 c^2}{2\pi Lr\gamma}$

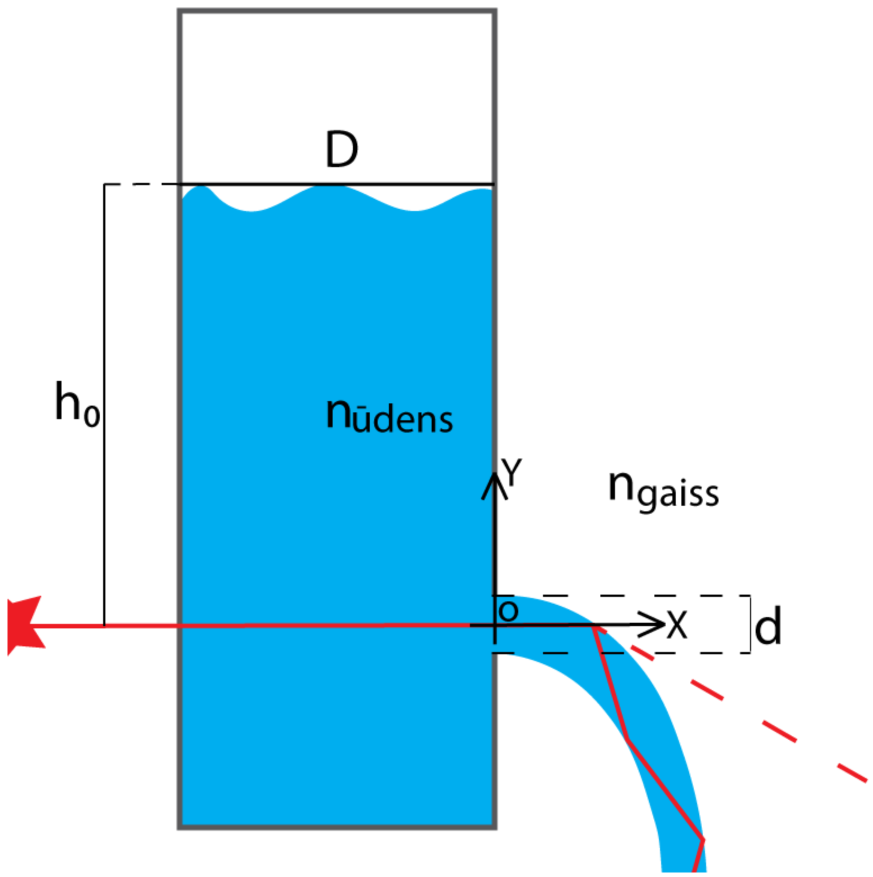
B3 Kas notiek, ja $v \to c$? *4 punkts*

Ja $v \to c$, tad $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \to \infty$. Tad $F_2 \to 0$

Piezīme: 4 punkti par tik īso apakšpunktu ir doti tāpēc, ka šai atbildei ir jāiegūst spēka izteiksme atbilstošajā formā, kas šeit ir izdarīts B2 punkta risinājumā.

Bernulli strūklakas gaismu šovs 10 punkti

Cilindriskā traukā ar iekšējo diametru D ir ieliets ūdens. Cilindriskā trauka apakšpusē, sānā ir izgriezts mazs caurums ar diametru d. Laika posmā t_0 ūdens līmenis traukā, mērot no mazā cauruma centra ir h_0. Cauri traukam, paralēli zemei tieši cauruma centrā tiek spīdināts ideāla lāzera gaismas stars. Ūdens no trauka visa mazā cauruma ietvaros tek ārā ar vienādu ātrumu, kas atbilst aprēķināmajam tā centrā. Berzi neņemt vērā!



A Izsaki vienādojumu līknei, ko veido ūdens plūsma, tekot ārā pa caurumu laika posmā t_0! Atbilde drīkst ietvert tikai h_0. *1 punkts*

Lai izteiktu ūdens līknes vienādojumu nepieciešams izteikt tā ātruma x komponenti. Šis ātrums sakrīt ar ūdens izejas ātrumu. Lai to aprēķinātu, izmantosim bernulī vienādojumu.

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot h_0 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = P_2 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{\rho \cdot v_{exit}^2}{2}$$

Tā, kā trauks ir atvērts, tad spiedieni ir vienādi. Pieņemot, ka $D >> d$, var izsecināt, ka v_1 ir nenozīmīgi mazs un tuvosies 0, kā arī mūsu koordinātu sistēmā $h_1 = 0$. Veicot dotos pārveidojumus mēs iegūstam:

$$\rho \cdot g \cdot h_0 = \frac{\rho \cdot v_{exit}^2}{2} \rightarrow v_{exit} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$$

Izsakam $y(t)$ un $x(t)$:

$$\begin{cases} y(t) = -\frac{g \cdot t^2}{2} \\ x(t) = v_e xit \cdot t \end{cases} \rightarrow \underline{\underline{y(x)}} = -\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_{exit}}\right)^2 = \underline{\underline{-\frac{x^2}{4 \cdot h_0}}}$$

B Izsaki vienādojumu ūdens līmenim atkarībā no laika: $h(t)$! *3 punkti*

Līdzīgi, kā iepriekš izsakam v_{exit}, tomēr šoreiz h_0 vietā būs $h(t)$:

$$v_{exit} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)}$$

Izmantojot iegūto vienādojumu varam izteikt h samazināšanās momentāno ātrumu, tātad $\frac{dh}{dt}$, kur $A_1 = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$ un $A_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$.

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)} \cdot A_2}{A_1} \rightarrow \int \frac{dh}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)}} = -\frac{A_2}{A_1} \int dt \rightarrow \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + C = -\frac{A_2}{A_1} \cdot t$$

Mēs zinām, ka laika brīdī $t = 0$ ūdens limenis ir tā sākotnējā stadijā, jeb $h(0) = h_0$. Izsakām C un tad $h(t)$:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} + C = -\frac{A_2}{A_1} \cdot 0 \rightarrow C = -\sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}}$$

$$\underline{\underline{h(t) = \frac{g}{2} \cdot (\sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} - \frac{d^2}{D^2} \cdot t)^2}}$$

C Izsaki vispārgo izteiksmi laikam t, pēc kura lāzera stars vairs nesaskarsies ar zemi kopā ar ūdeni! Atbilde drīkst iekļaut: D, d, g, h_0, n_{gaiss}, n_{udens}! *5 punkti*

Ar iepriekš iegūto $h(t)$ vienādojumu izteiksim ūdens iztecēšanas ātrumu atkarībā no laika:

$$v_{exit}(t) = \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{g}{2} \cdot (\sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} - \frac{A_2}{A_1} \cdot t)^2} = g \cdot (\sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} - \frac{A_2}{A_1} \cdot t)$$

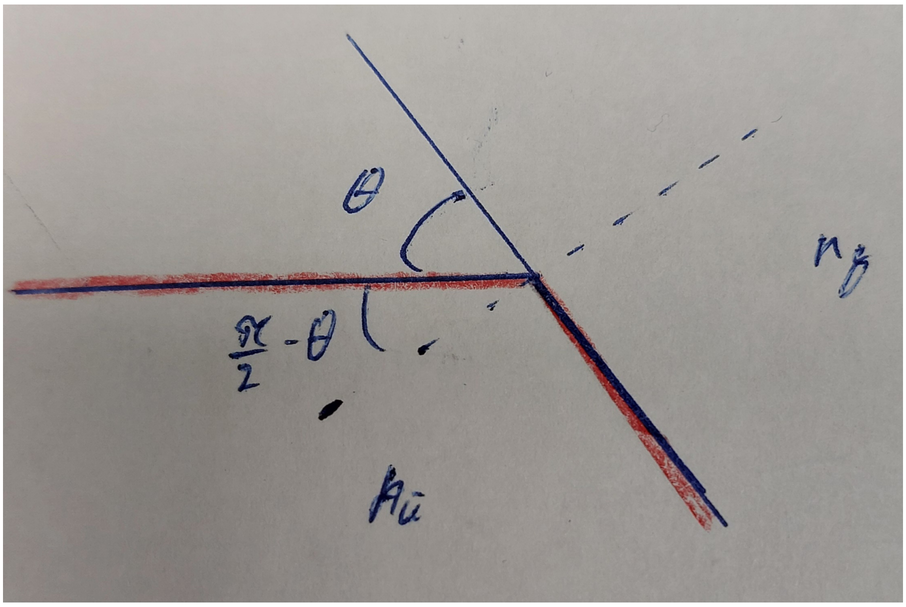
Līdzīgi, kā A punktā, izteiskim vienādojumu līknei, kādu veidos ūdens laika momentā t, tikai šoreiz mūs intesēs ūdens robeža, kas pie $x = 0$ atrodas par $\frac{d}{2}$ augstākpar koordinātu sākumpunktu.

$$y(x,t) = -\frac{g}{2} \cdot (\frac{x}{v_{exit}(t)})^2 + \frac{d}{2} = -\frac{x^2}{2 \cdot g \cdot (\sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} - \frac{A_2}{A_1} \cdot t)^2} + \frac{d}{2}$$

Lāzera stars saskarsies ar ūdens robežu, kad $y = 0$. Šajā punktā to vai lāzers tiks cauri pamatā noteiks ūdens veidotās līknes pieskares un horizontālā lazera veidotais leņķis. Šo leņķi apraksta pieskares slīpuma koeficients k. Šo koeficientu varam aprēķinot atvasinot un x vietā ievietojot atbilstošo vērtību.

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -\frac{x}{g \cdot (\sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} - \frac{A_2}{A_1} \cdot t)^2}; x_{krustojas} = g \cdot (\sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} - \frac{A_2}{A_1} \cdot t) \cdot \sqrt{\frac{d}{g}}$$

$$k = -\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{g} \cdot (\sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} - \frac{A_2}{A_1} \cdot t)} = -tg(\Theta)$$



Salīdzinoši vienkārši iespējams aprēķināt robežleņķi Θ pie kura lāzera stars sāks izlauzties no ūdens strūklakas:

$$sin(\frac{\pi}{2} - \Theta) \cdot n_{\bar{u}dens} = sin(\frac{\pi}{2}) \cdot n_{gaiss} \rightarrow tg(\Theta) = tg(\frac{\pi}{2} - arcsin(\frac{n_{gaiss}}{n_{\bar{u}dens}}))$$

Visbeidzot var visu savienot vienā vienādojumā un izteikt t!

$$tg(\frac{\pi}{2} - arcsin(\frac{n_{gaiss}}{n_{\bar{u}dens}})) = \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{g} \cdot (\sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} - \frac{A_2}{A_1} \cdot t)}$$

Izsaka t, ievieto A_1, A_2 un iegūst:

$$\underline{\underline{t = \frac{D^2 \cdot (\sqrt{2 \cdot h_0} \cdot tg(\frac{\pi}{2} - arcsin(\frac{n_{gaiss}}{n_{\bar{u}dens}})) - \sqrt{d})}{d^2 \cdot \sqrt{g} \cdot tg(\frac{\pi}{2} - arcsin(\frac{n_{gaiss}}{n_{\bar{u}dens}}))}}}$$

C1 Pēc cik ilga laika lāzera stars izspruks no ūdens, ja $D = 0.1m$, $d = 0.002m$, $h_0 = 20cm$, $n_{gaiss} = 1$, $n_{udens} = 1.333$! *0.5 punkti*

464.32s

C2 Pēc cik ilga laika lāzera stars izspruks no ūdens, ja tas pats trauks atradīsies uz Mēness, kur $g = 1.625m/s^2$! *0.5 punkti*

1140.84s

Asinsrite **10 punkti**

Šajā uzdevumā vienkāršoti apskatīsim asins plūsmu cilvēka asinsvados. Asins plūsmu modelēsim kā lamināru un viskozu, bet asinsvadus – kā cilindriskas caurules.

Pēc Puazeija likuma, spiedienu starpība uz caurules galiem Δp ir tieši proporcionāla laika intervālā izplūdušajam šķidruma tilpumam $Q = \frac{V}{t}$ ar proporcionalitātes koeficientu R, ko sauksim par pretestību:

$$\Delta p = QR$$

A Ir zināms, ka R ir atkarīgs no caurules garuma l, caurules šķērsgriezuma rādiusa r, viskozitātes koeficienta η, kura mērvienības ir $Pa \cdot s$, kā arī proporcionalitātes koeficienta $\frac{8}{\pi}$. Kura no izteiksmēm var atbilst pretestības R formulai?

a) $\dfrac{8l\eta}{\pi r^4}$ b) $\dfrac{8l}{\pi r^3 \eta}$ c) $\dfrac{8}{\pi} r^2 l \eta$ d) $\dfrac{8}{\pi}\sqrt{\eta l r}$ e) $\dfrac{8r\eta^2}{\pi l^2}$

1 punkts

Izmantosim dimensiju analzi. Pēc dotā Puazeija likuma, $R = \frac{\Delta p}{Q}$, no kurienes, zinot, ka mērvienības ir $[\Delta p] = Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{ms^2}$ un $[Q] = \frac{m^3}{s}$, var izteikt $[R] = \frac{\frac{kg}{ms^2}}{\frac{m^3}{s}} = \frac{kg}{m^4 s}$. Tādas pašas mērvienības jābūt pretestības formulai. Zinot, ka R ir atkarīgs no $[l] = m$, $[r] = m$ un $[\eta] = Pa \cdot s = \frac{kg}{ms}$, var sastādīt "mērvienību vienādojumu":

$$C \cdot [l^\alpha] \cdot [r^\beta] \cdot [\eta^\gamma] = m^\alpha \cdot m^\beta \cdot kg^\gamma m^{-\gamma} s^{-\gamma} = kg^1 \cdot m^{-4} \cdot s^{-1}.$$

Kur C - bezdimensionāla konstante (šajā gadījumā $\frac{8}{\pi}$). Pēc kg un s pakāpes var secināt, ka $\gamma = 1$, bet pēc m pakāpes - ka $\alpha + \beta = -3$. Vienīgā formula no dotām, kur tāda sakarība starp l un r pakāpēm pastāv, ir a) $\frac{8l\eta}{\pi r^4}$

B Tagad apskatīsim divus hipotētiskos asinsrites sistēmas elementus, kuru galos izmērītā spiediena starpība ir Δp.

B1 Aprēķiniet pilnu asins plūsmu Q_p asinsrites sistēmas posmā, kas sastāv no 2 paralēliem asinsvadiem ar pretestībām R_1 un R_2, kas galos savienojas kopā. *1 punkts*

Situācija ir analoģiska rezistoru paralēlam slēgumam līdzstrāvas ķēdē. Pēc $R = \frac{\Delta p}{Q}$ redzams, ka sprieguma lomu spēlē Δp, strāvas lomu spēlē Q, bet pretestības - R. Tātad, paralēlā slēgumā izpildās $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Tad $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Attiecīgi $Q_p = \frac{\Delta p}{R_p} = \frac{\Delta p (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$

B2 Aprēķiniet pilnu asins plūsmu Q_v asinsrites sistēmas posmā, kas sastāv no 2 secīgiem (saslēgtiem virknē) asinsvadiem ar pretestībām R_1 un R_2. *1 punkts*

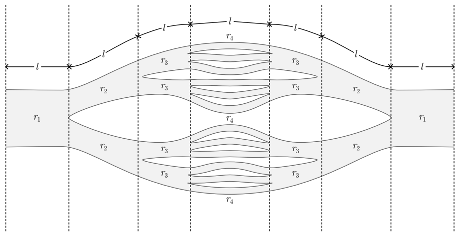
Situācija ir analoģiska rezistoru virknes slēgumam līdzstrāvas ķēdē. Pēc $R = \frac{\Delta p}{Q}$ redzams, ka sprieguma lomu spēlē Δp, strāvas lomu spēlē Q, bet pretestības - R. Tātad, virknes slēgumā izpildās $R_v = R_1 + R_2$. Tad $Q_v = \frac{\Delta p}{R_v} = \frac{\Delta p}{R_1 + R_2}$

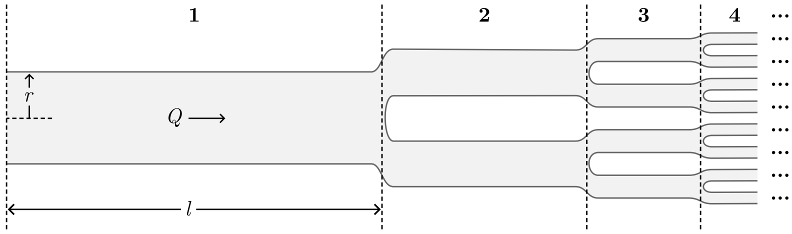
C Apskatīsim vienkāršotu asinsrites loka shēmu, kas parādīta attēlā pa kreisi. Zinot, ka visu asinsvadu garumi ir vienādi ar l un ka asins viskozitāte ir η, bet spiediena starpība starp asinsrites loka galiem ir Δp, nosakiet attiecbu $\alpha = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{r_3}{r_4}$. *3 punkti*

Apakšpunkts tika izņemts.

D Ceļā uz plaušām asins plūst sākuma pa lielākiem asinsvadiem, kas vēlāk sazarojas par mazākiem asinsvadiem un kapilāriem, kā parādīts uz attēla pa labi. Pieņemsim, ka katrs asinsvads sadalās divos asinsvados, kas ir 2 reizēs īsāki par to un kuru šķērsgriezuma laukums ir 4 reizēs mazāks. Ja ir zināms, ka pirmā asinsvada garums ir l, rādiuss ir r, asins viskozitāte ir η, bet caur pirmo asinsvadu plūst asins plūsma Q, kāda ir spiedienu starpība starp pirma asinsvada sākumu un visu n-to asinsvadu galiem? (asinsvadi tiek numurēti pēc izmēriem pa grupām ar vienādām dimensijām secībā no lielākā uz mazāko) *4 punkti*

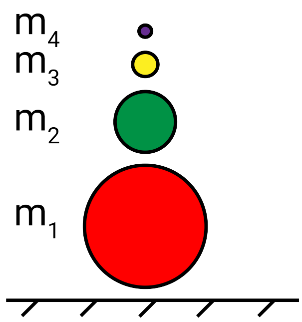
Pēc A punktā atrastās formulas var atrast pirmā asinsvada pretestību: $R_1 = \frac{8l\eta}{\pi r^4}$. Ir zināms, ka $\frac{S_{i+1}}{S_i} = \frac{1}{4}$, no kurienes $\frac{r_{i+1}}{r_i} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Bet ir arī dots, ka $\frac{l_{i+1}}{l_i} = \frac{1}{2}$, no kurienes, pēc pretestības formulas, iegūst, ka $R_{i+1} = 8R_i$. Taču paralēli saslegto asinsvadu skaits katrā līmenī divkāršojas, tāpēc $R_{\Sigma(i+1)} = 4R_{\Sigma(i)}$ tātad veidojas ģeometriskā progresija, kur pirmais loceklis ir $R_1 = \frac{8l\eta}{\pi r^4}$, bet kvocients ir 8. Tā kā katrs posms no paralēliem asinsvadiem ir saslēgts virknē ar iepriekšējo,$R = \sum_{i=1}^{N} R_{\Sigma(i)}$ Tātad, pēc ģeometriskās progresijas locekļu summas formulas, $R_n = \frac{\frac{8l\eta}{\pi r^4}(8^n-1)}{8-1} = \frac{8l\eta}{7\pi r^4}(8^n - 1)$. Tad, izmantojot formulu $\Delta p = QR$, iegūstam gala izteiksmi: $\Delta p = Q\frac{8l\eta}{7\pi r^4}(8^n - 1)$.



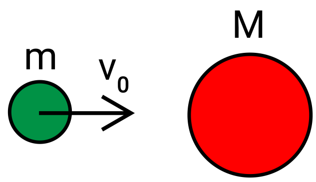


Galileja Lielgabals **11 punkti**

Šajā uzdevumā apskatīsim plaši izplatītu fizikas demonstrāciju, ko dažkārt dēvē par Galileja Lielgabalu. Galileja Lielgabals sastāv no vairākām lodveida bumbām, kas novietotas viena uz otras. Katra nākamā bumba ir daudz mazāka par iepriekšējo, tādejādi izveidojot tornim līdzīgu sistēmu, kas redzama attēlā zemāk.
Kad šī sistēma tiek palaista brīvā kritienā, tā saduras ar zemi un augšējā bumbiņa uzlido ļoti augstu.



A Sākotnēji apskatīsim vispārīgu sadursmi starp diviem ķermeņiem, kuru masas ir attiecīgi m un M. Zinot, ka sadursme starp šiem ķermeņiem ir pilnīgi elastīga un ka masa M sākotnēji ir nekustīga, savukārt masa m pārvietojas ar ātrumu v_0:



A1 Nosaki masas m ātrumu pēc sadursmes v_1! *3 punkti*

Lai noteiktu masas m ātrumu pēc sadursmes v_1 jāizmanto impulsa nezūdamības likums un enerģijas nezūdamības likums (tā kā sadursme ir elastīga). Apzīmēsim lielās masas ātrumu ar V_1. Attiecīgi iegūstam:

$$mv_0 = MV_1 + mv_1$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$$

Tā kā ir divi nezināmie (v_1 un V_1) un divi vienādojumi, varam atrisināt vienādojumu sistēmu, lai izteiktu v_1:

$$v_1 = \frac{m - M}{m + M}v_0$$

B No iepriekšējā punkta, nosaki masas m ātrumu v_1, ja M ir daudz lielāks par m, proti $M \gg m$!
1 punkts

Ja $M \gg m$ tad $m - M \approx -M$ un $m + M \approx M$, līdz ar to:

$$v_1 \approx -v_0,$$

proti, mazākā masa maina savu ātruma virzienu, bet ne tā lielumu. To var pielīdzināt elastīgai sadursmei ar sienu ($M_{siena} \gg m$), kur maza masa (bumba) m vienkārši atlec no sienas.

C Tagad apskatīsim Galileja Lielgabalu, kas sastāv no 4 dažāda izmēra bumbām. Sistēma tiek atlaista no augstuma $h = 1$m un tā ir pietiekami maza, lai neņemtu vērā dažādu bumbiņu augstuma atšķirības. Pieņem, ka visas sadursmes ir pilnīgi elastīgas un ka katra nākamā bumba ir ievērojami mazāka nekā iepriekšējā (proti, $m_1 \gg m_2 \gg m_3 \gg m_4 \gg$). Gaisa pretestību neņemt vērā.

C1 Cik ātri kustās 1. bumba tieši pēc sadursmes ar zemi? *1 punkts*
Tā kā ir dots, ka **visas** sadursmes ir pilnīgi elastīgas tad bumbas sadursme ar zemi arī ir pilnīgi elastīga un no iepriekšējā punkta secinām, ka pēc sadursmes ar zemi bumbas ātruma lielums ir tāds pats, kā tas bija tieši pirms tā sadūrās ar zemi. Apzīmēsim bumbas ātrumu pirms tā saduras ar zemi ar v_1'. No enerģijas nezūdāmības likuma:

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2$$

līdz ar to tās ātrums (precīzāk sakot, ātruma absolūtais lielums) tieši pēc tam, kad tā saduras ar zemi v_1 ir:

$$v_1 = v_1' = \sqrt{2gh} \approx 4,43\, m/s$$

C2 Cik ātri kustās 2. bumba tieši pēc sadursmes ar 1. bumbu? *1 punkts*
Savā kustībā virzienā uz leju 2. bumba sadursies ar 1. bumbu. Tā kā mēs pieņēmām, ka sistēmas jeb bumbu izmēri ir pietiekami mazi, lai neņemtu vērā bumbu augstuma atšķirības, mēs varam teikt, ka arī otrā bumba veic kritienu no augstuma $h = 1$ m. Līdz ar to, pirms tā saduras ar 1. bumbu tās ātrums arī ir $\sqrt{2gh}$. Apzīmēsim šo īpašo lielumu ar $v_0 = \sqrt{2gh}$ - tas atbilst 1. bumbas ātrumam pēc sadursmes ar zemi.

Tātad mēs zinām, ka pirms sadursmes otrā masa m_2 kustas ar ātrumu v_0 uz leju, bet pirmā masa m_1 ar ātrumu v_0 uz augšu, kā arī, ka $m_1 \gg m_2$. Ir dažādi veidi kā noteikt otrās masas ātrumu pēc sadursmes, taču visātrākais veids ir, sevi novietotojot 1. masas atskaites sistēmā. Sājā sistēmā masas m_1 ātrums ir $v_1 = 0$, savukārt masas m_2 ātrums ir $v_2 = 2v_0$. Varam arī novērot, ka šī ir identiska situācija ar punktu B, proti, pēc sadursmes masa m_2 vienkārši mainīs sava ātruma virzienu, proti pēc sadursmes masa m_2 virzīsies ar ātrumu $2v_0$ prom no m_1 masas m_1 atskaites sistēmā. Tā kā masas m_1 sistēma jau kustās ar ātrumu v_0 uz augšu, pēc sadursmes 2. bumba kustēsies ar ātrumu:

$$v_2 = 2v_1 + v_0 = 3v_0 \approx 13.29\, m/s$$

uz augšu.

C3 Cik augstu uzlidos 4. bumba pēc tam, kad visas savstarpējās sadursmes starp bumbām būs notikušas? Uzzīmē grafiku, kur attēlo visu bumbiņu vertikālo pozīciju pēc laika $y_n(t)$. *4 punkti*
Izmantojot iepriekšējā punkta loģiku varam līdzīgi noteikt 3. masas m_3 ātrumu pēc sadursmes ar otro masu:

$$v_3 = 2v_2 + v_0 = 7v_0 \approx 31,01\, m/s$$

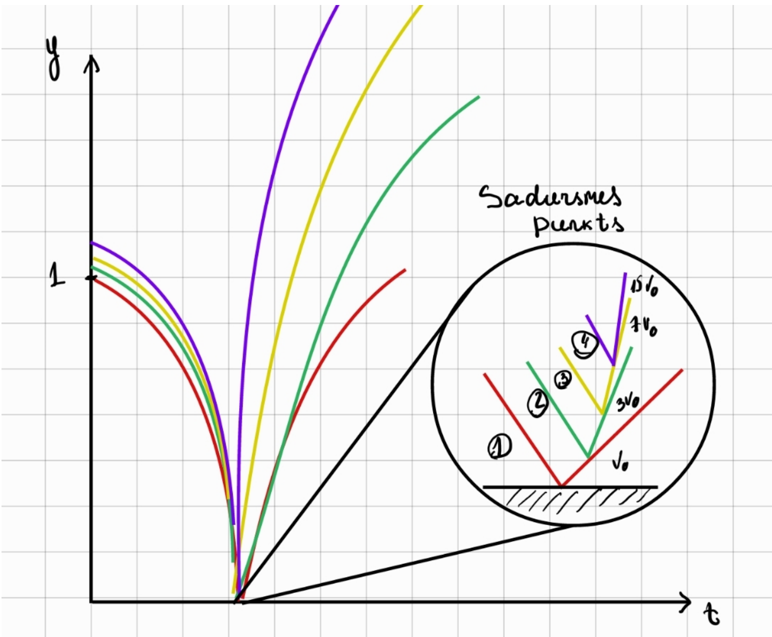
un visbeidzot arī 4. bumbas ātrumu:

$$v_4 = 2v_3 + v_0 = 15v_0 \approx 66,44\, m/s$$

Izmantojot enerģijas nezūdāmības likumu 4. bumbai $m_4gh = \frac{1}{2}m_4v_4^2$ varam noteikt bumbas sasniegto augstumu. Taču, zinot ka ar ātrumu v_0 bumba sasniedz $h = 1$ m, ka bumbas sasniegtais augstums aug ar v^2 un ka $v_4 = 15v_0$, varam noteikt, ka 4. bumba sasniegs $15^2 = 225$ reizes lielāku augstumu, proti:

$$h_4 = 225h = 225\,m$$

Attēlojot bumbu kustību kvalitatīvi var iegūt ko šādu. Jāpiemin, ka šajā skicē sasniegtie parabolu maksimumi nav mērogā.



C4 Cik augstu uzlidos n-tā bumba vispārīgā Galileja Lielgabalā? *2 punkti*

Apskatot matemātiski, kas notiek ar bumbu mēs redzam, ka ar katru nākamo bumbu ātrums palielinās 2 reizes $v_{i+1} = 2v_i$ un vēl pieskaita vienu v_0. Matemātiski šī sakarība ātrumam ir izsakāma šādi:

$$v_n = v_0(2^n - 1)$$

Līdz ar to n-tās bumbas augstums būtu:

$$h_n = (2^n - 1)^2 h = (2^n - 1)^2\,m$$

Interesanti pieminēt, ka mūsu modelī $n = 10$ atbilstu augstumam $h_{10} \approx 1046$ km. Protams, šī ir ļoti idealizēta sistēma un realitātē nepastāv pilnīgi elastīgas sadursmes un ir ļoti grūti atrast 10 dažādas bumbiņas, kur katrai būtu spēkā $m_{i+1} \gg m_i$.

Vajag tēju! 12 punkti

Ir nepieciešams padzert tēju. Diemžēl tu esi meža vidū. Bet par laimi tev līdzi ir īpatnēja turbīna, kuru modelēsim kā vaļēju cilindru ar garumu $L = 80cm$ un diametru $D = 100cm$. Pieņemsim, ka cilindra sienas ir ļoti plānas un turbīnas iekšējais mehānisms aizņem ļoti mazu tilpumu - tos var neņemt vērā. Šī turbīna no ūdens plūsmas un krituma spēj ģenerēt elektrību. Tev līdzi ir arī krūze ar ietilpību $V_K = 300ml$.
Ūdens īpatnējā siltumietilpība $C = 4200J/kgK$ un īpatnējais iztvaikošanas siltums ir $L = 22,6 * 10^5 J/kg$.

A Vispirms pamēģināsim ražot elektrību no straumes plūsmas. Pieņemsim, ka turbīna samazina tai cauri ejošā ūdens ātrumu par $k = 5\%$ un tās lietderības koeficients $\eta_1 = 90\%$. Tu esi atradis strautu, kurā ūdens plūst ar ātrumu $v_1 = 9km/h$. Tev līdzi ir arī vienkārša tējkanna, kura strādā ar jaudu $P_T = 2kW$.

A1 Cik J enerģijas dotu viens kg ūdens izejot cauri turbīnai? *1 punkts*
Vispirms pārveidojam doto ātrumu SI sistēmas mērvienībās. $v_1 = 9km/h = 2,5m/s$. Tā kā elektrību šajā gadījumā ražo no straumes plūsmas ātruma izmaiņām, dotās enerģijas daudzumu aprēķinām pēc kinētiskās enerģijas.

$$E_1 = \eta_1 E_{kin} = \eta_1 \frac{m\Delta v^2}{2} = \eta_1 \frac{m(kv_1)^2}{2} = 0,9\frac{1kg * (0,05 * 2,5m/s)^2}{2} = 0,007J$$

A2 Kāds ir ūdens masas plūsmas ātrums šajā strautā Atbildi izsaki kg/s! *2 punkti*
Apskatīsim, cik daudz ūdens aizplūst garām 1 sekundes laikā. Zinām, ka ūdens plūst ar ātrumu $v_1 = 9km/h = 2,5m/s$, tātad vienas sekundes laikā tas pārvietojas $l = 2,5m$. Tik garā strauta daļā ietilptu $V = 2.5m * S_s m^3$ ūdens, kur S_s ir strauta šķērsgriezuma laukums. Tad vienas sekundes laikā aizplūdīs $m = V\rho_u$. Līdz ar to ūdens masas plūsmas ātrumu aprēķinām

$$\dot{m} = \frac{m}{t} = \frac{\rho_u * l * S_s}{1s} = 1000kg/m^3 * 2.5m * S_s = 2500 * S_s kg/s$$

Uzdevuma tekstā strauta šķērsgriezums netika dots, tādēļ par pareizu atbildi tiks pieņemta pareizā formula.

A3 Kādu jaudu nodrošina turbīna šajā strautā? *2 punkts*
Vienas sekundes laikā caur turbīnu iztek $m_1 = 1960kg$ ūdens. Katrs 1kg dod $E_1 = 0,007J$ lielu enerģiju. Tad jaudu aprēķinām

$$P = \frac{E_{1s}}{1s} = \frac{m_1 E_1}{1s} = \frac{1960kg 0,007J/kg}{1s} = 14W$$

A4 Ja tev būtu atbilstošas jaudas tējkanna, cik ilgā laikā uzvārītos viena krūze ūdens, kura sākuma temperatūra $T_1 = 25°C$? Atbildi sniedz minūtēs! *1 punkts*

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{c(V\rho_u)\Delta T}{P} = \frac{4200J/kgK0,3l * 1kg/l(100-25)°C}{14} = 6750s = 113min$$

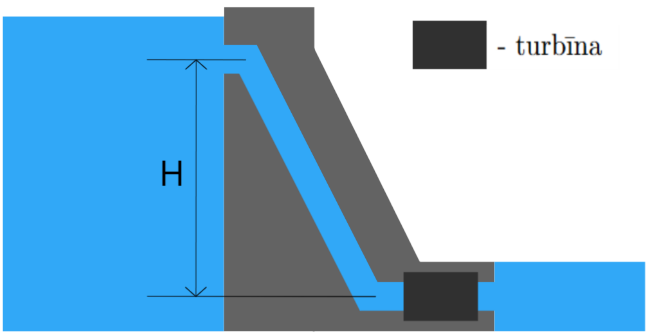
A5 Kāds ir ūdens ātrums (km/h) lēnākajā strautā, kurā varētu uzvārīt ūdeni? *1 punkts*
Mums pieejamās tējkannas jauda $P_T = 2kW$.

$$P = \eta_1 \frac{\dot{m}(kv_{min})^2}{2}$$

Izsakot v_{min}, iegūstam

$$v_{min} = \sqrt{\frac{\eta_1 2P}{k^2\dot{m}}} = \sqrt{\frac{0.9 * 2 * 2 * 10^3W}{0,05^2 1960kg/s}} = 19.2m/s = 69km/h$$

B Tu izlem uzbūvēt dambu, kurš ražo enerģiju no ūdens potenciālās enerģijas. Tā kritums ir $H = 1,5m$. Lietderības koeficients turbīnai šādā režīmā ir $\eta_2 = 40\%$.



B1 Par cik J izmainās potenciālā enerģija 1l ūdens iztekot cauri dambim un turbīnai? *1 punkts*

$$E_p = mg\Delta h = V\rho_u g\Delta h = 1l * 1kg/l * 9,81m/s^2 * 1,5m = 14,7J$$

B2 Pieņemot, ka caur dambi iztek ūdens masas plūsma ar ātrumu $vm_d = 90t/min$, kādu jaudu spēs nodrošināt turbīna? *1 punkts*
Apskatām 1 minūtes intervālu.

$$P = \eta_2 \frac{m_{1min} g\Delta h}{1min} = 0,4\frac{90 * 10^3 * 9,81 * 1,5}{60} = 8,8kW$$

B3 Cik cilvēkus gadā varētu apgādāt šāda turbīna, pieņemot, ka katrs cilvēks vidēji patērē $E_1 = 8000kWh$ gadā? Pieņemsim, ka enerģijas sadala optimāli - visa saražotā enerģija tiek izmantota. Atbildi izsaki vesalos skaitļos, noapaļojot uz leju! *1 punkts*

Gadā šāds dambis saražotu

$$E_{kop\bar{a}} = Pt = 8,8 * 10^3 * 1gadsJ = \frac{8,8 * 10^3 * 60^2 * 24 * 365}{10^3 * 60^2} kWh = 8,8 * 24 * 365 = 77000kWh$$

Tātad elektrības pietiek $\frac{77000}{8000} = 9$ cilvēkiem.

B4 Tu izmanto vienu ceturtdaļu no šīs jaudas, lai darbinātu tējkannu. Cik ilgā laikā uzvārīsies viena krūze ūdens? Ūdens sākuma temperatūra $T_1 = 25°C$. Atbildi sniedz sekundēs! *1 punkts*

$$t_v = \frac{Q}{P_t} = \frac{cm\Delta T}{0,25P} = \frac{4200 * 0,3 * 75}{0,25 * 8,8 * 10^3} = 43s$$

B5 Diemžēl rēķināšanas laikā ūdens jau sāka iztvaikot. Zinot, ka trešdaļa ūdens iztvaikoja, cik ilgi Tu rēķināji? Atbildi sniedz sekundēs! *1 punkts*

$$t_{tv} = \frac{Q_{tv}}{P_t} = \frac{Lm}{0,25P} = \frac{22,6 * 10^5 * 0,1}{0,25 * 8,8 * 10^3} = 103s$$

Tātad kopā rēķināšana ilga $t = t_v + t_{tv} = 43s + 103s = 146s$

Zogam akmeni **12 punkti**

Citplanētieši apciemo Zemi un vēlas paņemt dažus akmens paraugus, īpaši viņiem interesē zemūdens akmeņi. Tie parasti atrodas pie ūdenstilpju dibeniem. Taču viņu kuģis nosēsties uz Zemes virsmas nevar, tādēļ viņi izmēģina citas transporta metodes.
Uzdevumā pieņemiet, ka $g = 9,81m/s^2$.

A Citplanētieši vēlas iegūt kāda zemūdens akmens eksemplāru. Tā blīvums $\rho_a = 1,1g/cm^3$. Lai to izdarītu viņi izmanto kvadrātveida koka plāksni, kuru iegremdē ūdenī līdz ūdenstilpnes dibenam, pagaida, līdz uz tās ūdens plūsmas uzskalo akmeni, un tad palaiž vaļā. Koka blīvums $\rho_k = 600kg/m^3$

A1 Cik dziļā ūdenstilpē jāiegremdē plāksne, ja vēlas iegūt akmeni, kas atrodams spiedienā $p_a = 888kPa$? *2 punkts*

Spiedienu kādā dziļumā h aprēķinam saskaitot atmosfēras spiedienu un spiedienu šķidrumā (manometrisko spiedienu), $p_a = p_{atm} + \rho_u gh$. No šī vienādojuma izsakot h, iegūstam

$$h = \frac{p_a - p_{atm}}{\rho_u g} = \frac{787 * 10^3 Pa}{1000kg/m^3 * 9.81m/s^2} = 80m$$

A2 Ja plāksnes malas garums $a = 20cm$, kāds ir mazākais plāksnes biezums, lai, to palaižot vaļā, tā uzceltu $m_z = 1,65kg$ smagu akmeni? *2 punkts*

Uzdevuma tekstā dotā akmens masa m_z risinājumā tiks apzīmēta ar m_a. Uz ūdenī iegremdētu akmeni darbojas smaguma spēks (virzienā ūz leju") un Arhimēda spēks (virzienā ūz augšu"). Ja $F_A > F_{sm}$, tad ķermenis ceļas uz augšu, pretējā gadījumā grimst. Apskatām robežgadījumu, tas ir, kad $F_A = F_{sm}$. $F_A = (V_{pl})\rho_u g$ (akmens ir izcelts no ūdens) un $F_{sm} = (m_a + V_{pl}\rho_k)g$, ar ko iegūstam, ka mazākais plāksnes tilpums, lai uzceltu akmeni, ir

$$V_{pl} = \frac{m_a}{\rho_u - \rho_k}$$

Tā kā $V_{pl} = a^2 * b$, mazākais plāksnes biezums, lai uzceltu akmeni ir

$$b = \frac{m_a}{(\rho_u - \rho_k)a^2} = 0.1m = 10cm$$

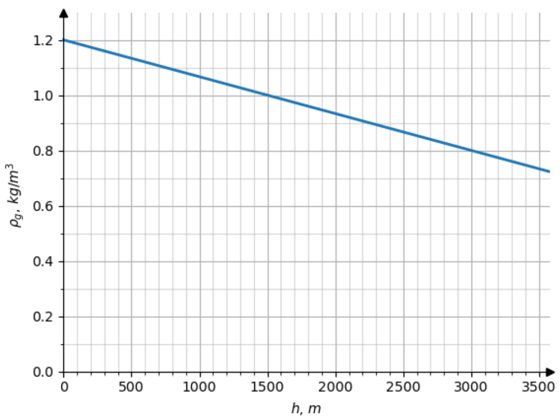
B Tālāk akmens jāuzceļ līdz citplanētiešu kuģim... Lai šo izdarītu, citplanētieši izdomājuši izmantot cita veida plāksni - vakuuma kasti. Šaj kastei ir ļoti plānas sieniņas (tik plānas, ka to tilpumu un masu aprēķinos var neņemt vērā), bet iekšā - vakuums. Tāpat kā iepriekšējā reizē akmeni plānots uzcelt uz plāknes un tad plāksni palaist vaļā.

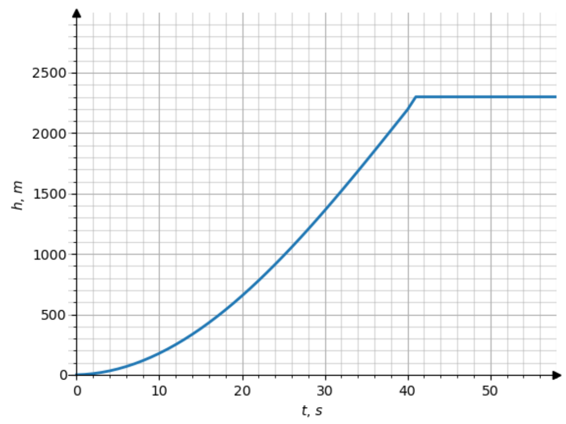
B1 Pieņemot, ka plāksnes biezums ir $b = 50cm$, un akmens masa $m_a = 1.65kg$, kādam jābūt paneļa virsmas laukumam, lai plāksne ar akmeni levitētu gaisā tuvu zemes virsmai, kur gaisa blīvums $\rho_g = 1.2kg/m^3$? *2 punkts*

Līdzsvara stāvoklī (lai plāksne ar akmeni levitētu gaisā) jāizpildās $F_A = F_{sm}$. Zinām, ka $F_A = (V_{pl} + V_a)\rho_g g = (Sb + V_a)\rho_g g$, savukārt $F_{sm} = m_a g$ (vakuuma plāksnes masu neņem vērā, jo teikts, ka sieniņas var neņemt vērā). Iegūstam

$$S = \frac{m_a - \frac{m_a \rho_g}{\rho_a}}{b\rho_g} = 2,7m^2$$

C Citplanētieši saprata, ka tik smagu akmeni būs grūti uzcelt, tādēļ paņēma akmeni ar citu masu. Ceļot, tie mērīja gaisa blīvumu, augstumu un celšanās laiku iegūstot šādus grafikus.





Citplanētiešu kuģis atrodas 3000m augstumā virs jūras līmeņa. Viņi izmanto vakuuma plāksni ar virsmas laukumu $S = 4m^2$ un biezumu $h = 0.5m$.

C1 Aprakstiet gaisa blīvuma $\rho, kg/m^3$ atkarību no augstuma h, m ar vienādojumu formā $y = c - kx$, kur y ir ρ skaitliskā vērtība kg/m^3 un x ir h skaitliskā vērtība metros! *1 punkts*

Redzam, ka grafiks ir taisne, kas atbilst uzdevuma prasībai atrast lineāru vienādojumu. No grafika nolasām c vērtību - vērtību pie h=0. Tad izvēloties divus punktus aprēķina koeficientu k. Iegūst:

$$\rho_g(h) = 1,2 - 1.3 * 10^{-4}h$$

C2 Kas notiek 41-tajā sekundē? *0.5 punkti*

Plāksne ar akmeni pārtrauc kustību augšup un tā vietā levitē sasniegtajā augstumā. Izpildās $F_A = F_{sm}$.

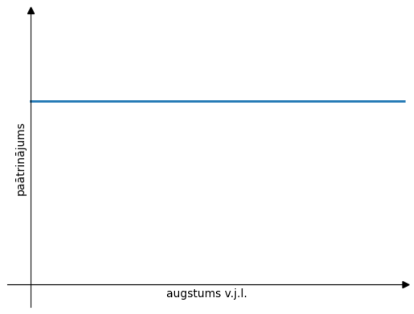
C3 Cik liels ir plāksnes un akmens kopējais blīvums? *0.5 punkti*

Apskatot informāciju par plāksnes un akmens sasniegto augstumu 41-majā sekundē, no grafika $h(t)$ nolasām $h = 2300m$. No grafika $\rho(h)$ nolasām, ka gaisa blīvums šajā augstumā ir $\rho_g = 0,9kg/m^3$.

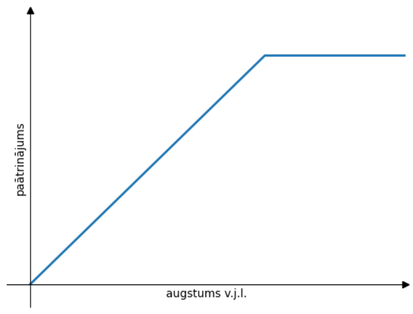
Tā kā šajā augstumā akmens ar plāksni levitē, t.i. $F_A = F_{sm}$ jeb $V_{ap}\rho_g g = V_{ap}\rho_{ap}g$, kur V_{ap} ir akmens un plāksnes kopējais tilpums un ρ_{ap} ir akmens un plāksnes kopējais blīvums. Iegūstam $\rho_{ap} = \rho_g = 0,9kg/m^3$.

C4 Kurš no grafikiem patiesi apraksta plāksnes un akmens paātrinājuma a atkarību no augstuma virs jūras līmeņa h? *1 punkts*

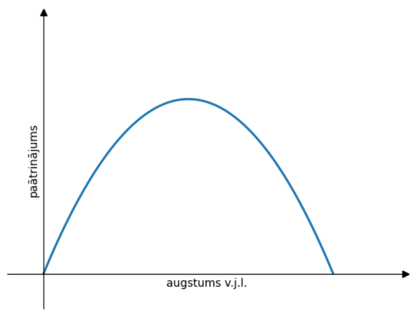
D. Smaguma spēks nemainās, tādēļ kopējais spēks (un līdz ar to paātrinājums) mainās atkarībā no F_A. Palielinoties h, samazinās ρ_g un arī F_A. Līdz ar to samazinās $F_{kop} = F_A - F_{sm}$ un arī paātrinājums $(a = \frac{F_{kop}}{m})$.
Alternatīvi var mēģināt šo noteikt no grafika, bet šajā gadījumā grūti pateikt, vai tas ir kvadrātfunkcijas vai kubiskās funkcijas grafiks, tādēļ drošāka metode ir analizēt darbojošos spēkus.



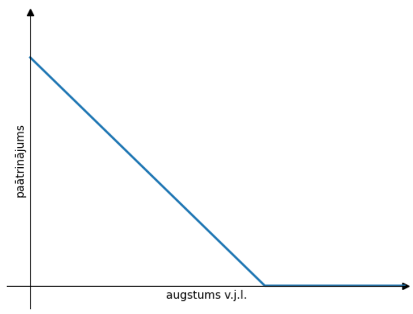
(a)



(b)



(c)



(d)

C5 Cik smags akmens tika celts? *2 punkts*

Zinām, ka augstumā 2300m izpildās $\rho_{ap} = 0,9kg/m^3.//$

$$\rho_{ap} = \frac{m_a}{V_a + V_{pl}} = \frac{m_a}{\frac{m_a}{\rho_a} + V_{pl}}$$

Izsakot m_a iegūstam:

$$m_a = \frac{V_{pl}\rho_{ap}}{1 - \frac{\rho_{ap}}{\rho_a}} = 1,8kg$$

C6 Kāda ir smagākā akmens masa, kuru iespējams ar doto plāksni uzcelt līdz citplanētiešu kuģim? *1 punkts*

Citplanētiešu kuģis atrodas $h = 3000m$, kur $\rho_{ap} = \rho_g = 0.8kg/m^3$. Tāpat kā iepriekšējā solī aprēķinām m_a

$$m_a = \frac{V_{pl}\rho_{ap}}{1 - \frac{\rho_{ap}}{\rho_a}} = 1,6kg$$

Latvijas oranžais zelts 14 punkti

Jaunais fiziķis Toms ir atradis lādi ar metāla monētām. Palīdzēsim viņam saprast, kas tas ir par metālu.
Lādē Toms ir atradis arī vēstuli, kurā bija rakstīts, ka monētas sastāv no metāla, kas ir veidots no ** atomiem ar rādiusu $r = 116,01pm$ *CC izkārtojuma (ar * tiek apzīmētas vietas, kur papīrs bija bojāts un nevarēja saprast, kas par simbolu tur bija rakstīts).

A Sākumā Toms nolēma eksperimentāli izmērīt metāla blīvumu. Viņš pieņēma, ka monēta ir cilindrs un izmērīja to augstumu $h = 2,0mm$ un pamata diametru $d = 2,00cm$. Arī jaunais gudrinieks noteica monētas masu: $m = 5,630g$.

A1 Kāds ir metāla blīvums ρ? *1 punkts*

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 h} \approx 8960,42\frac{kg}{m^3}$

A2 Kā Toms varētu vienkāršot savu pētījumu, samazinot mērījumu skaitu? *1 punkts*

Viens no veidiem ir ielikt monētu ūdenī mērcilindrā vai citā graduētā traukā, izmērot tās tilpumu uzreiz, nemērot atsevišķi augstumu un diametru.

B Toms ir dzirdējis par BCC (Body-Centered Cubic - kubiskā tilpumcentrējuma) kristāliem, kuru struktūra ir parādīta attēlā pa kreisi. Viņš pieņēma, ka metāla kristāliskā struktūra ir tieši šāda.

B1 Cik metāla atomi ir vienā BCC šūnā? *2 punkti*

Vienā BCC šūnā ir 2 veseli metāla atomi: 1 centrā un $8 \cdot \frac{1}{8}$ kuba virsotnēs (katrs šāds atoms pieder vienlaikus 8 blakus esošām BCC šūnām).

B2 Zinot, ka Pitagora teorēma strādā arī trīsdimensionālā gadījumā (tas ir, taisnstūra paralēlskaldņa ar malām a, b un c diagonāles garums ir $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$), izmantojot Avogadro konstanti un noteikto A punktā blīvumu, aprēķiniet metāla molmasu ($\frac{g}{mol}$)! Kas tas ir par metālu? *3 punkti*

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2 \cdot \frac{M}{N_A}}{a^3}$, kur N_A ir Avogadro konstante, bet a - kubiskās šūnas šķautnes garums. To var noteikt pēc kuba diagonales garuma, izmantojot trīsdimensionālo Pitagora teorēmu: $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Taču kuba diagonāle tiek veidota no 4 atomu rādiusiem, tātad, $a = \frac{4r}{\sqrt{3}}$. Ievietojot šo blīvuma formulā varam iegūt izteiksmi $\rho = \frac{2(\sqrt{3})^3 M}{N_A 64 r^3}$, no kurienes $M = \frac{\rho N_A 32 r^3}{(\sqrt{3})^3} \approx 52\frac{g}{mol}$, kas atbilst hromam (Cr).

C Tomēr jaunais gudrinieks atcerējās par FCC (Face-Centered Cubic - kubiskā skaldņcentrējuma) kristāliem, kuru struktūra ir parādīta attēlā pa labi.

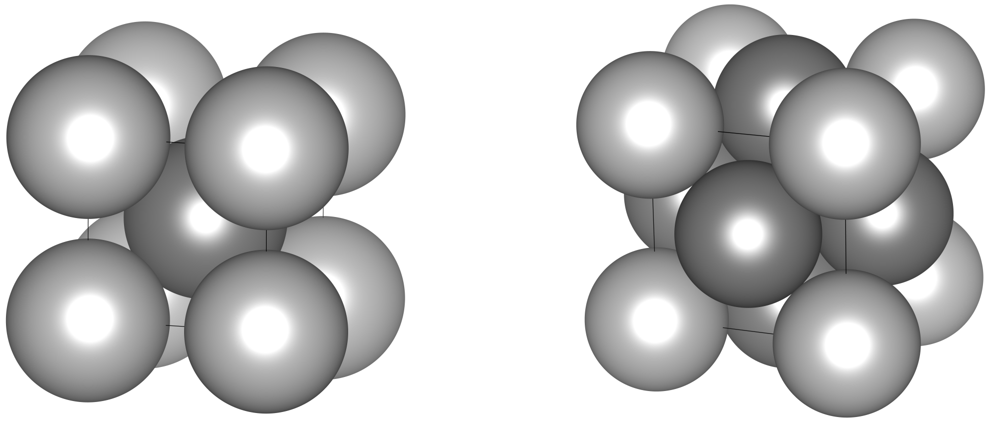
C1 Cik metāla atomi ir vienā FCC šūnā? *2 punkti* FCC šūna sastāv no 4 atomiem: 6 atomi atrodas uz skaldnēm, tāpēc tie pieder vienlaikus divām šūnām, bet vēl 8 atomi atrodas kuba virsotnēs un tiek dalīti starp 8 šūnām. Tātad, $6 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{8} = 4$

C2 Izmantojot Avogadro konstanti un noteikto A punktā blīvumu, aprēķiniet metāla molmasu ($\frac{g}{mol}$)! Kas tas ir par metālu? *3 punkti*

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4 \cdot \frac{M}{N_A}}{a^3}$, kur N_A ir Avogadro konstante, bet a - kubiskās šūnas šķautnes garums. To var noteikt pēc kuba skaldnes (kvadrāta) diagonales garuma, izmantojot Pitagora teorēmu: $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$. Taču kvadrāta diagonāle tiek veidota no 4 atomu rādiusiem, tātad, $a = \frac{4r}{\sqrt{2}}$. Ievietojot šo blīvuma formulā varam iegūt izteiksmi $\rho = \frac{4(\sqrt{2})^3 M}{N_A 64 r^3}$, no kurienes $M = \frac{\rho N_A 16 r^3}{(\sqrt{2})^3} \approx 48 \frac{g}{mol}$, kas atbilst titānam (Ti).

D Lādē Toms atrada arī sarakstu ar materiālu īpatnējām pretestībām. Viņš uzzināja, ka B punktā iegūtā metāla īpatnējā pretestība ir $\rho_1 = 1,25 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot m$, bet C punktā iegūtā metāla īpatnējā pretestība ir $\rho_2 = 1,77 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$. Lai saprastu, no kura no diviem metāliem sastāv monētas, Toms pārkausēja vienu no tām par vadu ar garumu $l = 15cm$. Vada galiem viņš pieslēdza spriegumu $U = 0,01V$ un izmērīja strāvas stiprumu caur vadu: $I = 15,777A$. Kurš no metāliem ir pareizs? Uzrakstiet teikumu no lādē atrastās vēstules, * vietās ierakstot pareizos simbolus! *2 punkti*

Vads ir izstiepts cilindrs, tātad, tā kā tilpums saglabājas, varam aprēķināt iegūtā vada šķērsgriezuma laukumu: $V = \frac{pid^2 h}{4} = Sl$, no kurienes $S = \frac{\pi d^2 h}{4l}$. Tad, pēc pretestības formulas, var iegūt vada pretestību: $R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{4l^2}{\pi d^2 h}$ Tad, pēc Oma likuma, $U = IR = I\rho \frac{4l^2}{\pi d^2 h}$, no kurienes var izteikt īpatnējo pretestību: $\rho = \frac{\pi d^2 h U}{4 I l^2} \approx 1,77 \cdot 10^{-8}$. Tātad, pareizs ir metāls, kas tika iegūts C punktā, tas ir, titāns. Tad var atjaunot teikumu no atrastās vēstules: Monētas sastāv no metāla, kas ir veidots no Ti atomiem ar rādiusu r = 116, 01 pm FCC izkārtojumā.



Zirnekļi **8 punkti**

Uz viendimensionāla (taisnes nogrieznis) koka gabala ar garumu $L = 10\,\mathrm{cm}$ skraida N pilnīgi vienādi zirnekļi(zirnekļus mēs modelēsim kā punktus kuriem piemīt vienāda masa, kustības ātrums). Kad zirneklis sasniedz koka gabala galu, tas nokrīt lejā un vairs nevar atgriezties atpakaļ. Kad divi zirnekļi satiekās vienā koka gabala punktā, katrs no zirnekļiem pagriežas un turpina kustību ar tādu pašu ātruma kā pirms sadursmes, tikai pretējā virzienā(Ja pirms sadursmes Zirneklis skrēja pa labi -pēc viņš skries pa kreisi). Sākuma laika brīdī $t = 0\,\mathrm{s}$ zirnekļi atrodās nejaušajās vietās gar koka gabalu, viņu ātrumu lielumi ir vienādi ar $v = 5\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$, ātrumu virzieni arī tiek sadalīti nejauši. Pēkšņi Zirnekļi sāk skriet. Kāds ir minimāls laika, kuram ir jāpaiet, lai uz koka gabala nepaliktu neviena zirnekļa? Paskaidrojiet savu atbildi! *8 punkti*

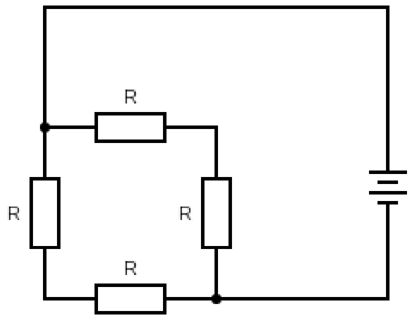
Apskatīsim, kas notiek, kad satiekas divi zirnekļi, uzdevumā ir rakstīts, ka satikšanas brīdī viņi maina sava ātruma virzienu uz pretējo, bet abu zirnekļu ātrumu moduļi paliek nemainīgi(un vienādi ar $v = 5\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$), tā kā zirnekļu masas arī ir vienādas **kinemātiski šī situācija ir identiska** ar zirnekļiem, kas iziet cauri viens otram un turpina kustību ar nemainīgu ātruma vektoru, tas savukārt nozīmēs, ka minimālais laiks, kuru mums prasa ir vienkārši lielākais iespējamais attālums, uz koka gabala(vienāds ar gabala garumu $L = 10\,\mathrm{cm}$), izdalīts ar zirnekļu ātruma moduli:

$$t_{\mathrm{min}} = \frac{L}{v} = 2\,\mathrm{s}$$

Tātad mēs varam būt droši, ka pēc divām sekundēm uz koka gabala nepaliks neviena zirnekļa.

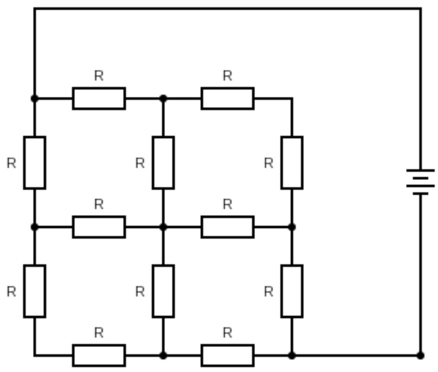
Bezgalīgā ķēde **10 punkti**

Šajā uzdevumā tiks apskatīta bezgalīga ķēde, kas veidota no vairākiem kvadrātiem ar rezistoriem, kuru pretestība ir R. Šāds kvadrāts elektriskajā ķēdē redzams zemāk attēlā.

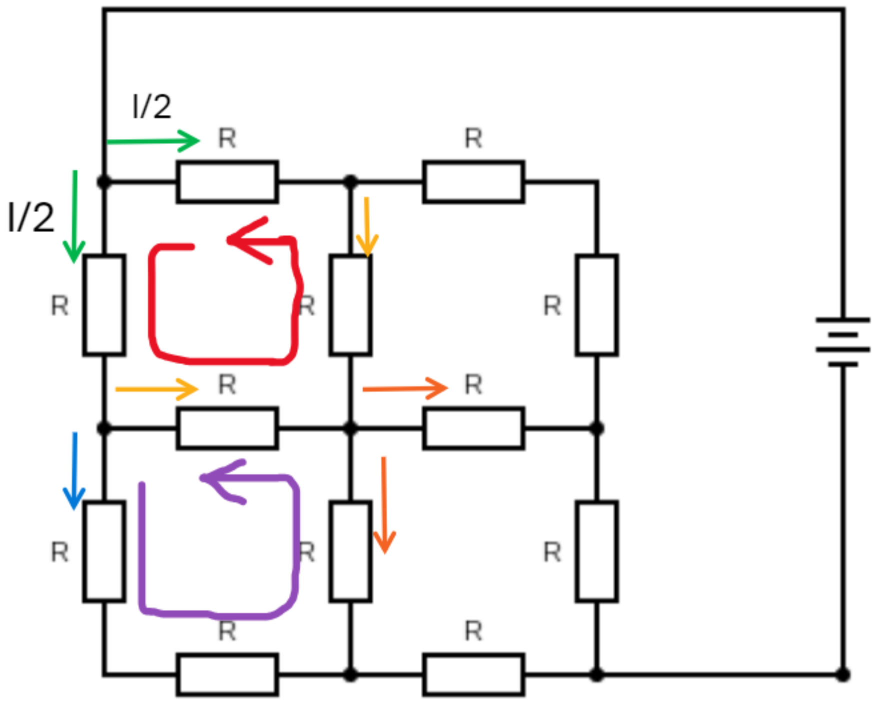


A Nosakiet viena kvadrāta kopējo pretestību! *1 punkts*
Kvadrāts ir veidots no paralēlā slēguma, kuru veido divas virknes ar pretestību $R_{virkne} = 2 * R$. Tātad kopējā kvadrāta pretestība ir $R_{kv} = \frac{R_{virkne}}{2} = R$.

B Nosakiet kopējo pretestību nxn kvadrātu ķēdei! 2x2 kvadrātu ķēdi var redzēt attēlā zemāk. *3 punkti*



Vispirms var novērot, ka kopējais kvadrāts ir simetrisks. Tāpēc kvadrātā ieplūstošā strāva, apzīmēsim ar I sadalās 2 vienlīdz spēcīgās strāvās ar stiprumu I/2. Tālāk pierādījuma tiks izmantoti Kirhofa likumi, proti, tiks apskatītas elektriskās ķēdes cilpas, kurās kopējā sprieguma maiņa ir 0. Kā arī fakts,ka izejošās un ieejošās strāvas stiprums ir vienāds visos punktos. No sākuma apskatīsim 2x2 ķēdi (n=2).

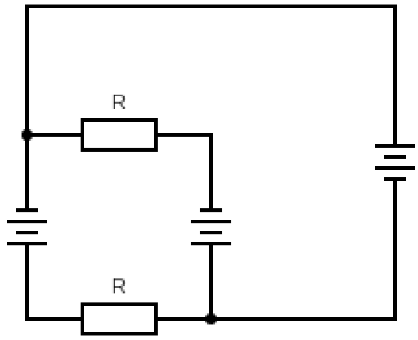


Apskatot sarkano cilpu varam pierādīt, ka abas strāvas, kas atzīmētas ar dzeltenajām bultām ir vienlīdz spēcīgas, tās apzīmēsim ar I_1. Strāva, kas apzīmēta ar zilo bultu tiks apzīmēta ar I_2. Izmantojot Kirhofa likumus: $I/2 = I_1 + I_2$. Līdzīgi var pierādīt, ka abas ar oranžajām bultām atzīmētās ķēdes ir vienlīdz stipras (simetrijas dēļ) un ar strāvas stiprumu I_1. Ja apskata kreiso apakšējo kvadrātu, var secināt, ka $I_1 = I_2$, kas izriet no spreigumu summas violetajā cilpā. Tātad var spriest, ka strāvas, kas plūst pa 2x2 kvadrāta ārējo kontūru samazinās 2 reizes katrā kvadrātā, līdzko tās maina virzienu (attēlā: no vertikāli uz leju uz horizontāli pa labi) tā notiek pretējs process. Ja apskata kvadrātu ar $n > 2$, var secināt, ka šis strāvas stipruma samazināšanās 2 reizes turpinās arī pie $n > 2$. Tālāk var pierādīt, ka $I * R_{kop} = I/2 * R + I/4 * R + I/8 * R + ... + I/2^n * R$. Tātad $R_{kop} = \sum R * 2/2^i = \sum R * 2^{1-i}$, kur $1 < i < n$.

C Nosakiet pretestību, ja $n \to \infty$! *2 punkti*

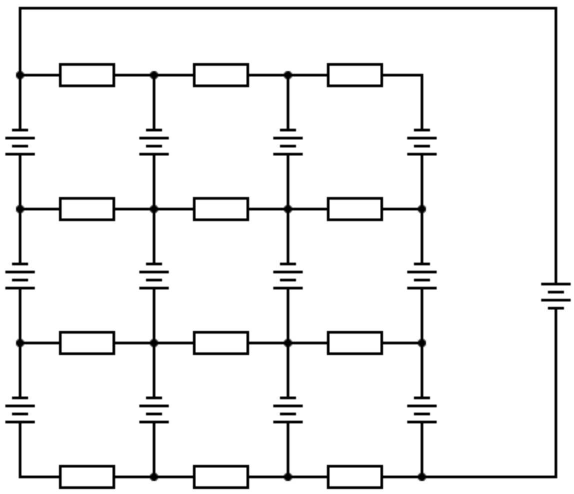
Izmantojot iepriekš aprēķināto, ka $R_{kop} = \sum R * 2/2^i$, var secināt, ka $R_{kop} = R * 2 * \sum 1/2^i = 2R$.

D Oriģinālais kvadrāts, no kura veidota kvadrātu ķēde, tiek nedaudz izmainīts. Tagad to veido 2 baterijas un 2 rezistori, kā redzams zemāk.



Nosakiet pretestību nxn jauno kvadrātu ķēdei, ja $n \to \infty$! Bateriju elektrodzinējspēks jaunajā kvadrātā ir tāds pats, kāds baterijai, kurai kavdrātu ķēde pievienota. *4 punkti*

Attēlā redzams, kā iszkatītos kvadrāts ar n=3.



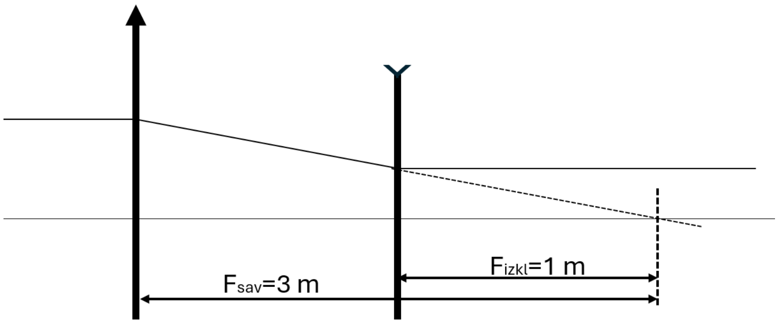
Pielietojot līdzīgu stratēģiju, kā B apakšpunktā, var secināt, ka strāvas stiprums visos rezistoros būs vienāds un vienliels ar strāvas stiprumu strāvai, kas ieplūst lielajā kvadrātā un vienāds ar I. Pieņemsim, ka visu bateriju elektrodzinējspēks ir ϵ. No tā izriet, ka $\epsilon = I * R_{kop}$. Savukārt tālāk analizēta tiks cilpa, kas veidota no lielā kvadrāta ārējas kreisās un apakšējās malas, kā arī baterijas, kas pievienota kvadrātam. Šai cilpai spēkā ir vienādojums, ka $\epsilon * (n+1) = n * I * R$. Izmantojot abus vienādojumus kopējo pretestību var izteikt kā $R_{kop} = \frac{n}{n+1} * R = (\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}) * R$. Ja $n \to \infty$, tad $R_{kop} = R$

Lēcas **6 punkti**

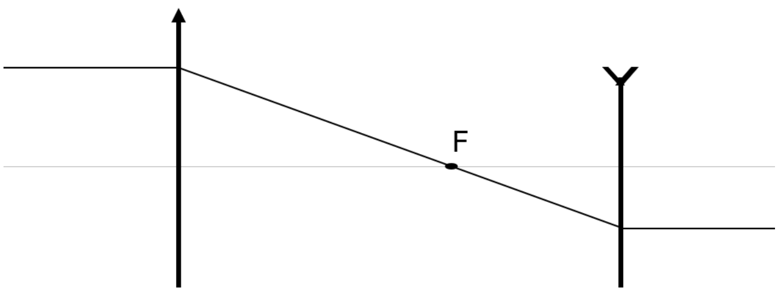
Optikas entuziasts Pēteris vēlas pats izveidot lēcas dažādām vajadzībām. Ja uzdevumā ir apskatītas vairāku lēcu sistēma, pieņemt, ka to galvenās optiskās asis pārklājas, kā arī lēcas atrodas vidē ar $n = 1$.

A Pirmo Pēteris apskata savācējlēcu, kura priekšmetu, kas atrodas 2m attālumā no lēcas, projicē ar lineāro palielinājumu 10. Nosakiet lēcas fokusa attālumu! *2 punkti*
Attālumu no lēcas līdz attēlam var aprēķinot, izmantojot lineārā palielinājuma definīciju $\Gamma = \frac{f}{d}$, kur $\Gamma = 10$, $d = 2m$, tātad $f = 20m$. Fokusa attālumu var izteikt izmantojot plānās lēcas formulu $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}$. No šī izriet, ka fokusa attālums ir $F = 20/11m = 1.82m$

B Turpmāk pieņemiet, ka iepriekš minētās lēcas fokusa attālums ir 3m (vērtība neatbilst A uzdevuma atbildei)! Aiz tās Pēteris novieto izkliedētājlēcu. Ja uz lēcu sistēmu spīdina paralēlu staru kūli, tad šī sistēma to pārveido kompaktākā paralēlo staru kūlī. Ja izkliedētājlēcas fokusa attālums ir 1m, atrodiet attālumu starp lēcām! *2 punkti*
Šim uzdevumam ir divas pareizas atbildes. Pieņemot, ka uz savācējlēcu spīdina paralēlu staru kūli, tad attēls veidojas tās fokusa punktā. Savkukārt, lai stars, kas krīt uz izkliedētājlēcu būtu paralēls tās galvenajai optiskajai asij, tās šķietamajam stara pagarinājumam jākrusto izkliedētājlēcas fokusu. Zemāk redzams ģeometrisks attēlojums.



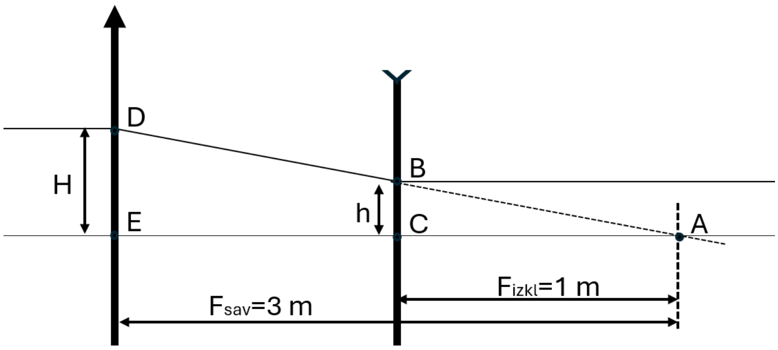
No attēla var noteikt, ka attālumam starp lēcām jābūt 2m.
Otrā pareizā atbilde izriet no fakta, ka stari aiz savācējlēcas var iet caur fokusa punktu pirms tie sasniedz izkliedētājlēcu. Šādā gadījumā abu lēcu fokusu punktiem ir jāsakrīt. Šādu situāciju var apskatīt attēlā, kas redzams zemāk.



No attēla var spriest, ka attālums starp lēcām ir fokusu summa, tātad 4m.

C Tālāk Pēteris apskata vienu staru, kas ir paralēls galvenajai optiskajai asij atrodas augstumā H

virs tās, bet, izejot cauri lēcu sistēmai, ir augstumā h. Nosakiet attiecību H/h! *2 punkti*
Risinājumam var izmantot līdzīgu attēlu, kāds tika izmantots B punktā.

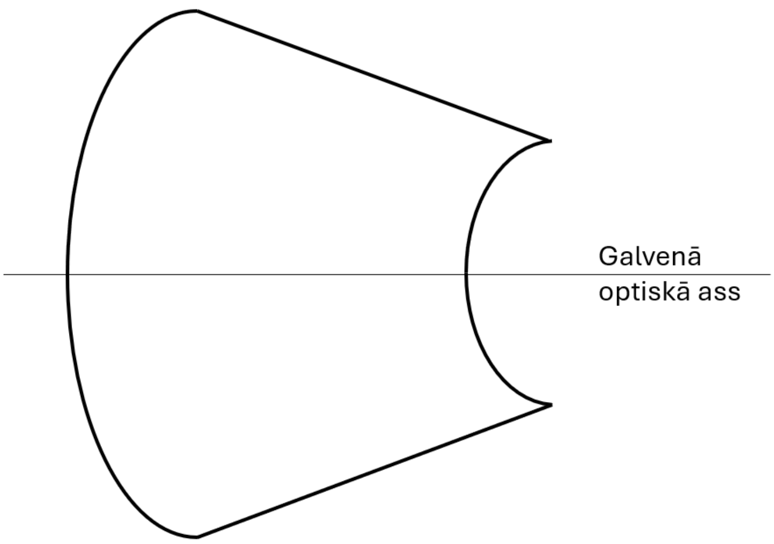


Apskatot līdzīgus trijstūrus ACB un AED var secināt, ka $\frac{H}{h} = \frac{F_{izkl}}{F_{sav}} = 3$

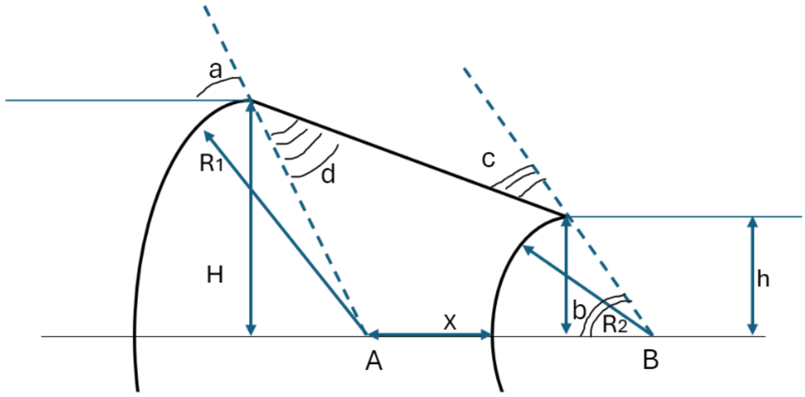
D Pēteris izdomāja, ka lēcu sistēmu var aizstāt ar 1 ne-plakanu lēcu, kas izgatavota no materiāla ar gaismas laušanas koeficientu $n_l = 1.6$. Šo lēcu Pēteris izgatavoja ar pāris priekšnoteikumiem:

- Lēcai ir tāda pati H/h attiecība kāda aprēķināta iepriekš.
- Lēcas laukums ir minimāls, proti, uz to spīdinot paralēlu gaismas staru kūli, visa lēca ir noklāta ar gaismas stariem, kas iet caur to.
- Lēcas maksimālais biezums (attālums paralēli galvenajai optiskajai asij) ir 2 centimetri, bet augstums - 10 centimetri.
- Lēca ir simetriska attiecībā pret galveno optisko asi, tās veidotais attēls ir tiešs.

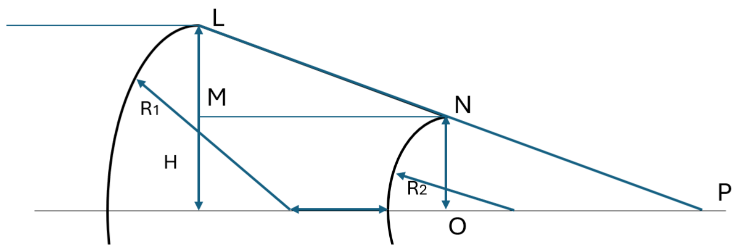
Aprakstiet lēcas ģeometriju! *4 punkti*
Vispirms jānoskaidro, kā izskatās aprakstītā lēca. Lēcas priekšējai pusei jābūt ieliektai, bet aizmugurei ieliekta, lai nodrošinātu līdzīgu staru plūsmu, kā aprakstīta iepriekšējos punktos. Lai nodrošinātu to, ka lēcas laukums ir maksimāls, tad lēcai jāizskatās kā redzams zemāk attēlā.



Turpmāk, ērtības labad tiks apskatīta tikai augšējā puse. Turpmāk uzdevumā tiks izmantoti garumi H, h, x, rādiusi R_1, R_2, kā arī leņķi a, b,c un d. To attēlojums redzams attēlā zemāk.



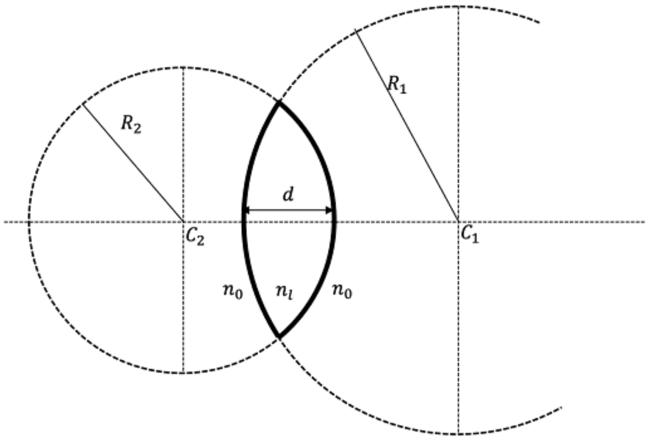
Zinot, ka lēcas maksimālais augstums ir 10 cm, var izteikt $H = 5$ cm. Kā arī zinot, ka $\frac{H}{h} = 3$, var izteikt $h = \frac{5}{3}$ cm. Šos augstumus var izteikt kā rādiusu un leņķu funkciju, proti, $H = R_1 \cdot \sin(a)$ un $h = R_2 \cdot \sin(b)$. Leņķu a un d, kā arī leņķu b un c attiecību var izteikt izmantojot gaismas laušanas likumu, zinot, ka $n_{\text{vide}} = 1$, $n_{\text{lēca}} = 1.6$. Leņķu attiecība: $\frac{\sin(a)}{\sin(d)} = \frac{n_{\text{lēca}}}{n_{\text{vide}}} = 1.6$ un $\frac{\sin(c)}{\sin(b)} = \frac{n_{\text{vide}}}{n_{\text{lēca}}} = \frac{1}{1.6}$. Lēcas maksimālo biezumu var izteikt kā $R_1 + x + R_2 * (1 - cos(b)) = 2cm$. Lai uzdevumu varētu atrisināt līdz galam, nepieciešams veikt vēl divus vienādojumus, kurus var iegūt izmantojot attēlā zemāk redzamos pārveidojumus.



No trijstūra LMN var secināt, ka $tan(90\deg - a + d) = \frac{x + R_1 * (1 - cos(a) + R_2 * (1 - cos(b))}{H - h} = \frac{x + R_1 * (1 - cos(a) + R_2 * (1 - cos(b))}{10/3}$. Savukārt, trijstūrī ONP var secināt, ka leņķi ONP var izteikt kā $90\deg - b + c$. Šis leņķis ir vienāds ar leņķi MLN, kas ir vienāds ar $90\deg - a + d$. Tātad $c - b = d - a$. No visiem iepriekšminētajiem vienādojumiem var izveidot vienādojumu sistēmu ar 7 nezināmajiem un 7 vienādojumiem.
Tā kā uzdevumā ir prasīts tikai aprakstīt lēcu, tad nav nepieciešams precīzs atrisinājums.

E Arī abas lēcas iepriekš minētajā lēcu sistēmā ir izveidotas no vienāda materiāla ar $n_l = 1.6$. Kas ir smagāks - lēcu sistēma vai tās aizstājējlēca? Pieņemt, ka jaunās lēcas maksimālais augstums ir tāds pats, kā katrai lēcai lēcu sistēmā, kā arī to šķērsgriezuma laukums ir minimāls. *2 punkti*

Smagāka būs tā lēca vai lēcu sistēma, kam šķērsgriezuma laukums būs lielāks. Lai novērtētu lēcu izmērus, jāzina to rādiusi. Tos var noteikt ar formulu $\frac{1}{f} = (n - 1) * (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$. Atceroties, ka savācējlēcai ir 3m fokusa attālums un pieņemot, ka abi rādiusi savācējlēcai ir vienādi, to skaitliskais lielums būtu vienāds ar 3.6 m. Tas nozīmē, ka pie lēcas augstuma 10 cm tās biezums būtu $2 * R * (1 - cos(arcsin(0.05/3.6)) = 0.7mm$, bet izkliedētājlēcai tas būtu 1 mm, kamēr aizstājējlēcas biezums sasniedz pat 2 cm. Tātad var droši apgalvot, ka lēcu sistēmas masa būs mazāka nekā aizstājējlēcas masa. Zemāk redzams attēls, ar kura palīdzību var noteikt biezuma izteiksmi.



Zemūdens skaņa **10 punkti**

Šajā uzdevumā apskatīsim parādības, kas ir saistītas ar skaņas izplatīšanos ūdenī.

A Sākuma noskaidrosim, kāds ir skaņas izplatīšanas ātrums gaisā un ūdenī.

A1 Ir zināms, ka skaņas ātrums gaisā ir atkarīgs no temperatūras ($T = 293K$), gaisa molmasas ($M_g = 29\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$) un universālās gāzu konstantes ($R = 8,31\frac{J}{mol\cdot K}$). Izmantojot dimensiju analīzi (vienādojuma abām pusēm jāsakrīt mērvienībām), atrodiet skaņas ātruma vērtību gaisā v_g, ja ir dots, ka tā ir arī proporcionāla bezdimensionālam koeficientam $k = \sqrt{1,4}$. *0.5 punkts*

$v = C\cdot T^{\alpha}\cdot M_g^{\beta}\cdot R^{\gamma}$, $[v] = m\cdot s^{-1}$, $[T] = K$, $[M_g] = kg\cdot mol^{-1}$, $[R] = J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1} = kg\cdot m^2\cdot s^{-2}\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}$, tātad $m\cdot s^{-1} = K^{\alpha}\cdot kg^{\beta}\cdot mol^{-\beta}\cdot kg^{\gamma}\cdot m^{2\gamma}\cdot s^{-2\gamma}\cdot mol^{-\gamma}\cdot K^{-\gamma}$. No kurienes, sastādot lineāro vienādojumu sistēmu priekš α, β un γ, varam iegūt, ka $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ un $\alpha = \frac{1}{2}$. Tātad, izmantojot doto bezdimensionālo koeficientu, $v = \sqrt{\frac{1{,}4RT}{M_g}} \approx 343\frac{m}{s}$

A2 Skaņas izplatīšanas ātrumu ūdenī nosaka cita formula (teorētiski tā ir spēkā arī gaisam). Nosakiet šo ātrumu $v_{\bar{u}}$, ja ir zināms, ka tas ir atkarīgs tikai no ūdens tilpuma elastības moduļa $B_{\bar{u}} = 2{,}2\cdot 10^9$ Pa un ūdens blīvuma $\rho_{\bar{u}} = 1000\frac{kg}{m^3}$. *0.5 punkti*

$v = C\cdot\rho_{\bar{u}}^{\alpha}\cdot B_{\bar{u}}^{\beta}$, $[v] = m\cdot s^{-1}$, $[\rho_{\bar{u}}] = kg\cdot m^{-3}$, $[B_{\bar{u}}] = Pa = kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-2}$, no kurienes $m\cdot s^{-1} = kg^{\alpha}\cdot m^{-3\alpha}\cdot kg^{\beta}\cdot m^{-\beta}\cdot s^{-2\beta}$. Sastādot lineāru vienādojumu sistēmu ar nezināmajiem α un β, var iegūt, ka $\beta = \frac{1}{2}$ un $\alpha = -\frac{1}{2}$, tātad, $v = \sqrt{\frac{B_{\bar{u}}}{\rho_{\bar{u}}}} \approx 1483\frac{m}{s}$.

B Apskatīsim vienu no iemesliem, kāpēc ūdenī gandrīz nevar dzirdēt skaņu, kas radusies virs ūdens. Ir zināms, ka skaņas ātrums gaisā ir $v_g = 346m/s$, bet ūdenī skaņas ātrums ir $v_{\bar{u}} = 1500m/s$ (vērtības var atšķirties no A punktā iegūtajām). Apskatīsim "skaņas staru", koherento skaņas viļņu kūli, ko var izveidot, piemēram, ar sāzera palīdzību (akustisko lāzera analogu).

B1 Pieņemsim, ka mēs novietojam sāzeru tā, ka "skaņas stars" krīt uz horizontālo ūdens virsmu leņķī $\alpha = 4°$ pret vertikāli. Kādu leņķi ar vertikāli β veidos atstarotā skaņa un kādu leņķi ar vertikāli γ veidos skaņas kūlis zem ūdens? *1.5 punkti*

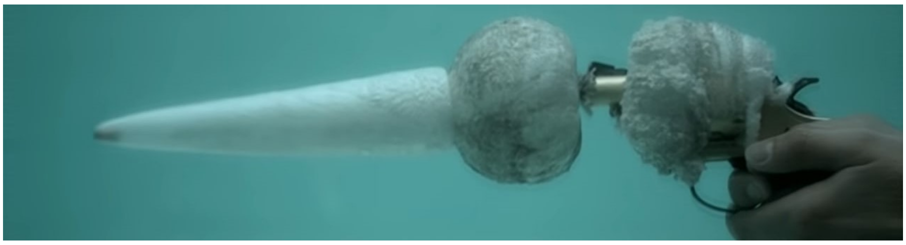
Atstarošanas leņķis ir vienāds ar krišanas leņķi, tas ir, $\beta = \alpha = 4°$. Lai atrastu leņķi γ, izmantosim Snella likuma analogu: $\frac{\sin\alpha}{v_g} = \frac{sin\gamma}{v_{\bar{u}}}$, no kurienes, pēc proporcijas, $\gamma = \arcsin\left(\sin\alpha\frac{v_{\bar{u}}}{v_g}\right) \approx 17,6°$.

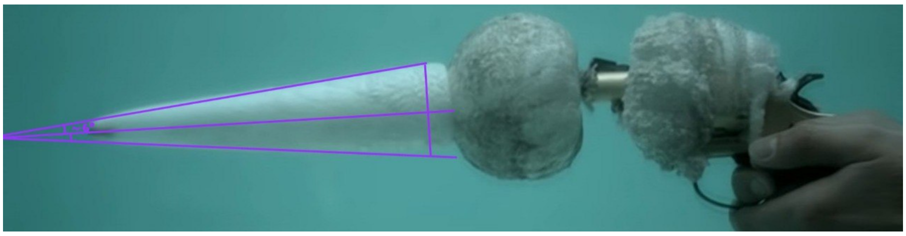
B2 Kāds ir maksimālais leņķis α_{max}, ko krītošais "skaņas stars" var veidot ar vertikāli, lai vismaz kāda daļa skaņas varētu ieiet ūdenī? *1.5 punkti*

Situācija ir analoģiska ar pilno iekšējo atstarošanos optikā. Nosacījums ir tāds, ka $\gamma = 90°$. Izmantosim Snella likuma analogu: $\frac{\sin\alpha_{max}}{v_g} = \frac{sin90°}{v_{\bar{u}}}$, no kurienes $\alpha_{max} = \arcsin\left(\frac{v_g}{v_{\bar{u}}}\right) \approx 13,3°$.

C Tagad analizēsim lodes kustību zem ūdens. Tai kustoties uz priekšu, aiz tās veidojas koniskais turbulences apgabals, ko veido skaņas viļņu frontes, kas kustas lēnēk par pašu lodi. Izmantojot doto bildi, novērtējiet lodes ātrumu v, pieņemot, ka, veicot attālumu no pistoles lidz attēlotajai pozicijai, ātrums paliek gandrīz nemainīgs. *3 punkti*

Šajā uzdevumā ir nepieciešams izmērīt pusi no koniskās virsmas virsotnes leņķa. To var izdarīt, piemēram, sadalot nofotografēto aksiālšķēlumu divos taisnleņķa trijstūros un izmērot divas tā malas, pēc tam pielietojot trigonometriju. Koniskā virsma veidojas, no kustīgā avota skaņas viļņu frontēm. Var apskatīt divus sfēriskus viļņus: Attiecīgi, pēc šī attēla, $\sin\theta = \frac{v_s\Delta t}{v_L\Delta t}$, no kurienes $v_L = \frac{v_s}{\sin\theta} \approx 14188\frac{m}{s}$

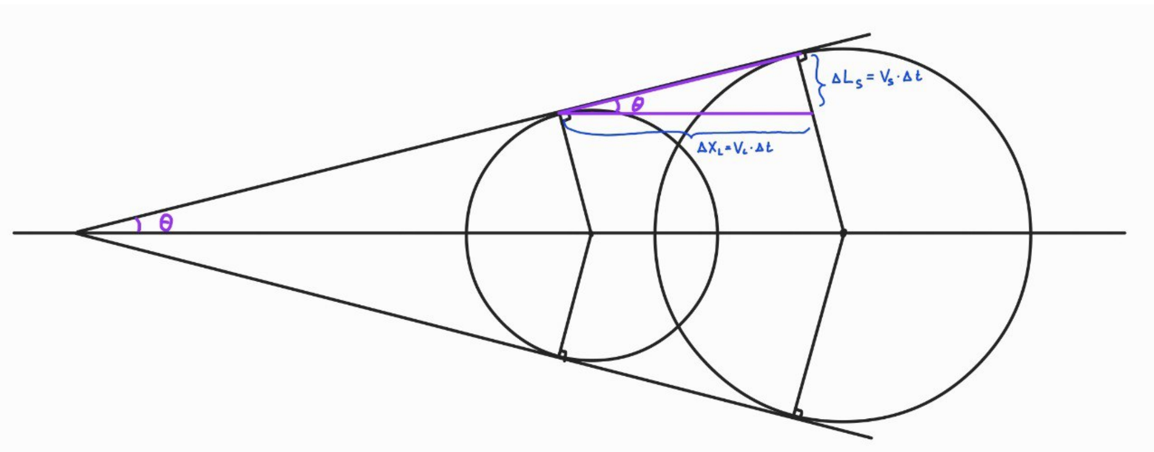




D Kā ir zināms, delfīni savā starpā sazinās, izmantojot ultraskaņu. Kādā Dienvidamerikas upē, kuras straumes ātrums ir $v_{str} = 7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, dzīvo vēl neatklātā ļoti ātru upesdelfīnu suga. Divi šādi delfīni peld viens otram pretī zem ūdens virzienā, kas ir paralēls straumes ātrumam. Abu delfīnu ātrums krasta atskaites sistēmā ir $v_{del} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Viens no delfīniem rada skaņu ar frekvenci $f_0 = 100\,\mathrm{kHz}$. Kādas frekvences f skaņu dzirdēs otrais delfīns? *3 punkti*

Šajā situācijā ir novērojams Doplera efekts, taču vide, kurā izplatās skaņa, kustas krasta atskaites sistēmā. Nav zināms,kurš no delfīniem peld pa straumi un kurš pret, tāpēc ir jāapskata divi gadījumi:

1. Skaņas avots kustas pa straumi. Tādā gadījumā ūdens atskaites sistēmā skaņas avota ātrums ir $v_1 = v_{del} - v_{str}$ un skaņas uztvērējā skaņa ir $v_2 = v_{del} + v_{str}$. Tad, pēc Doplera efekta formulas, $f = f_0 \cdot \frac{v_s+v_2}{v_s-v_1} = \frac{v_s+v_{del}+v_{str}}{v_s-v_{del}+v_{str}} \approx 106,94kHz$
2. Skaņas avots kustas pret straumi Tādā gadījumā ūdens atskaites sistēmā skaņas avota ātrums ir $v_1 = v_{del} + v_{str}$ un skaņas uztvērējā skaņa ir $v_2 = v_{del} - v_{str}$. Tad, pēc Doplera efekta formulas, $f = f_0 \cdot \frac{v_s+v_2}{v_s-v_1} = \frac{v_s+v_{del}-v_{str}}{v_s-v_{del}-v_{str}} \approx 107,01kHz$


θ
θ
ΔL_S = V_S · Δt
ΔX_L = V_L · Δt

Lidmašīna 9 punkti

Dodoties lidojumā no Rīgas uz Higsabezoni, Edgars nolēma sekot līdzi visai informācijai, kas ir pieejama lidmašīnā par degvielas patēriņu un dažādos lidojuma brīžos pārliecināties, vai lidmašīnā ir pietiekošas degvielas rezerves, lai aizlidotu līdz galamērķim.
Edgars lidmašīnas tehniskajā dokumentācija izlasīja, ka lidmašīna paredzētais komerciālo lidojumu attālums ir 4575 km. Lidmašīna lido ar 870 km/h lielu ātrumu attiecībā pret gaisu un tās degvielas patēriņš ir 2200 litri stundā.

A Aprēķināt, cik litri degvielas tiek sadedzināti, lidmašīnai veicot 4575 km lielu attālumu. *1 punkts*
Aprēķins: vispirms aprēķinām cik ilgā laika lidmašīna veic 4575 km $t = s/v = 4575/870 = 5.286$ stundas.
Ja 1 stundā lidmašīna patērē 2200 litrus, tad 5.286 stundās tā patērē $2200 * 5.286 = 11569$ litri.

B Ir zināms, ka lidmašīnai ir degvielas rezerve, taču Edgars nekur neatrada informāciju, cik tieši liela ir degvielas rezerve. Neilgi pēc pacelšanās, lidmašīnas pilots paziņoja, ka lidosim ar nelielu līkumu, tāpēc paredzamais lidojuma attālums palielinājās līdz 5000 km. Aprēķināt, cik litru liela degvielas rezerve ir vajadzīga, lai aizlidotu uz Higsabezoni. *1 punkts*
Aprēķins: papildus 5000-4575 km= 425 km lidmašīna veiks 425/870=0.4885 stundām un šajā laikā iztērēs 2200*0.4885=1075 litri degvielas.

C Edgars pieņēma, ka degvielas rezerve ir tieši tik liela, lai lidmašīna varētu droši nolidot šo 5000 km lielo attālumu. Nolidojot 2500 km, sāka pūst ceļavējš ar ātrumu 130 km/h. Kāds būs lidojumā kopējais iztērētais degvielas daudzums, ja ceļavējš pavadīs lidmašīnu līdz galamērķim? *1 punkts*
Aprēķins: lidojumā kopējais paredzamais lidojuma laiks ir $2500/870 + 2500/(870 + 130) = 5.374$ stundas. Un patērēs $5.374 * 2200 = 11822$ litrus.

D Taču ceļa posmā no 4300 km līdz 5000 km, šķērsojot Krāsaino jūru, parādījās spēcīgs pretvējš: 200 km/h. Kāds ir paredzamais kopējais degvielas patēriņš, ja pretvējš būs visu atlikušo lidojuma laiku. *1 punkts*
Aprēķins: lidojumā kopējais paredzamais lidojuma laiks ir $2500/870 + (4300 - 2500)/(870 + 130) + (5000 - 4300)/(870 - 200) = 5.71834$ stundas. Un patērēs 5.7676*2200=12 580 litrus.

E Vai Edgara pieņēmums par sākotnējo degvielas rezervi bija pareizs? *1 punkti*
Aprēķins: Edgars bija pieņēmis, ka lidmašīnai kopējais degvielas daudzums ir 11'569+1075=12'644 litri.
Savukārt aprēķini liecina, ka lidojumam ir vajadzīgi 12'580 litri degvielas.
Komercreisos lidmašīnas nelido ar tik mazu degvielas rezervi. Edgara pieņēmums bija nepareizs.

F Cik litrus degvielas lidmašīna iztērēja lidojuma laikā uz vienu pasažieri, ja lidmašīnā atradās 145 pasažieri? *1 punkti*
Aprēķins: 12580/145=86,76 Litri uz 1 pasažieri.

G FKO 5 cilvēku komanda dodas ceļojumā uz apbalvošanas ceremoniju uz Hisabezoni ar vieglo automašīnu, kuras degvielas patēriņš ir 7l uz 100 km. Katrs no jaunajiem fiziķiem ir gatavs šim mērķim piešķirt tieši tik pat daudz degvielas, cik iztērēja lidmašīna uz vienu cilvēku. Vai FKO komandai pietiks degvielas, lai aizbrauktu uz FKO apbalvošanas ceremoniju, ja pieņem, ka attālums, kas jāveic automašīnai, ir par 20% lielāks par attālumu, ko veic lidmašīna, lidojot savā maršruta? *3 punkti*
Aprēķins: FKO komanda var nobraukt $86.76 * 5/7 * 100 = 6197 km$. Savukārt attālums līdz Meironai

ir $5000 * 1.2 = 6000 km$. Jā FKO komanda var doties uz apbalvošanas ceremoniju.

Kinemātika 10 punkti

Jaunie fiziķi, sākot apgūt fizikas mācību priekšmetu, apskata fizikāla ķermeņa ar masu m taisnvirziena kustību pa horizontālu virsmu ignorējot berzi un gaisa pretestības. Jaunie fiziķi nolēma pārliecināties, vai viņi izprot sakarības starp šādiem fizikāliem lielumiem:

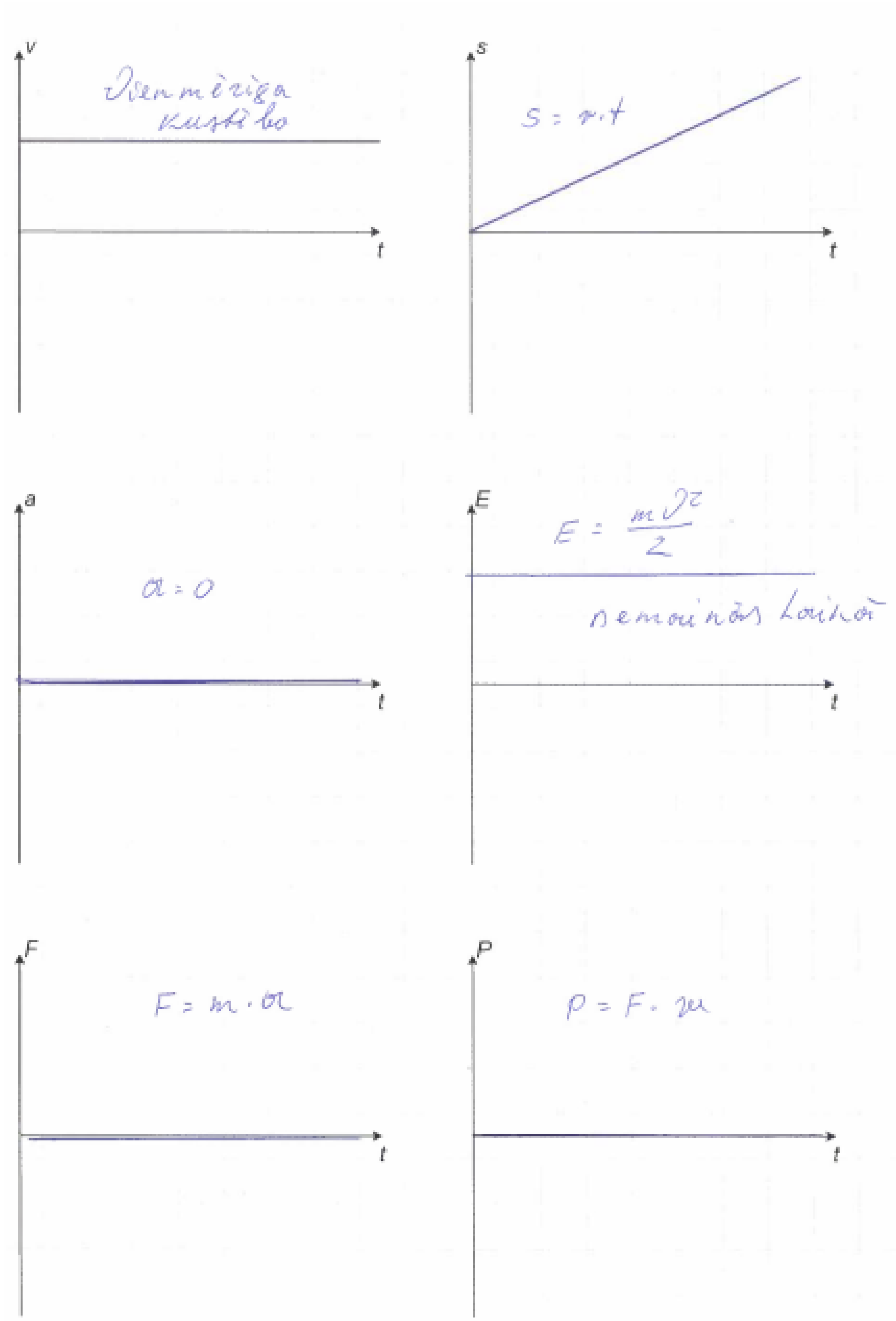
- Pārvietojums $s[m]$
- Ātrums $v[m/s]$
- Paātrinājums $a[m/s^2]$
- Spēks $F[N]$
- Jauda $P[W]$
- Kinētiskā enerģija $E[J]$

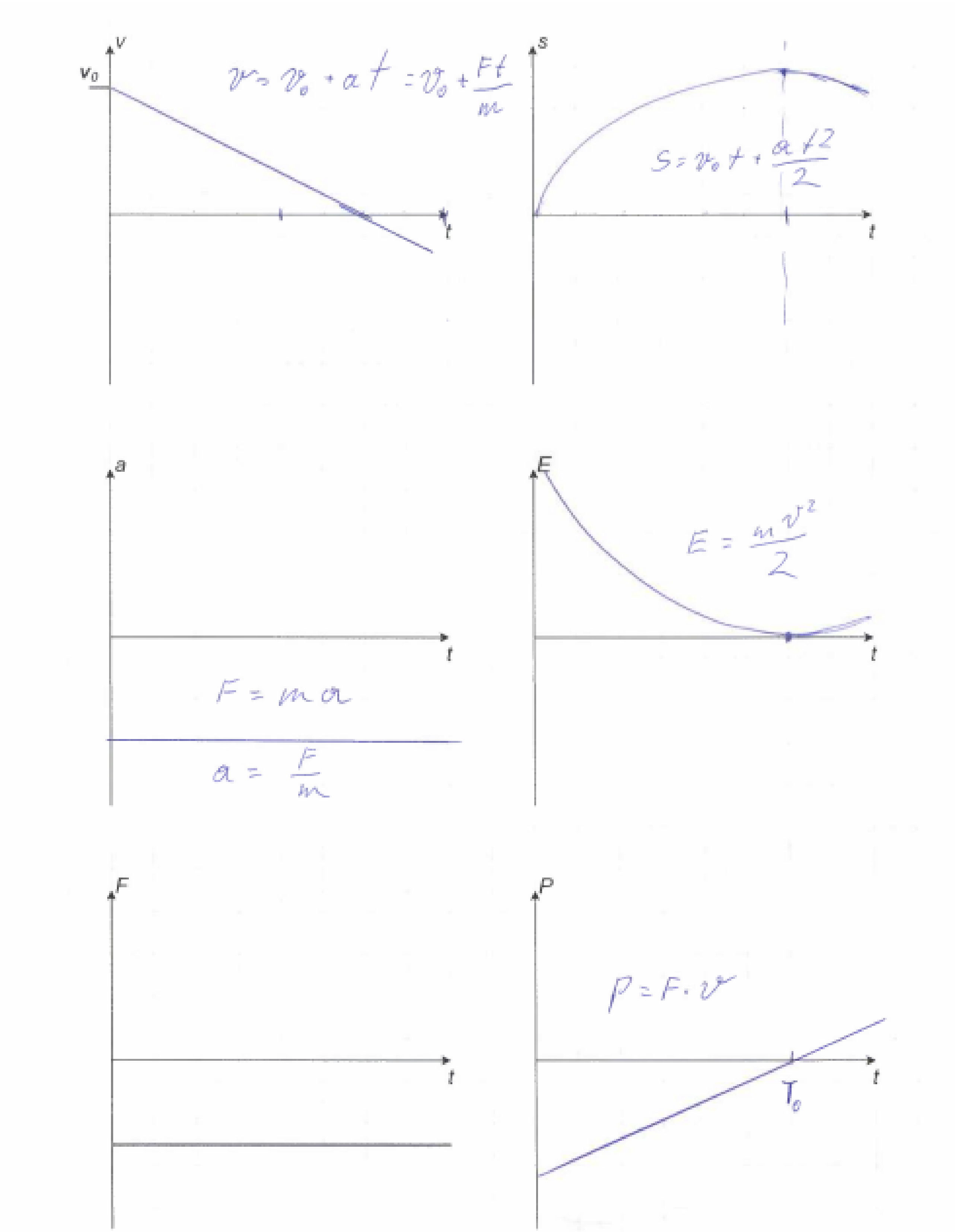
Dotajās sagatavēs uzzīmē savstarpēji atbilstošus grafikus, kas attēlotu, kā šie visi fizikālie lielumi ir savstarpēji saistīti un mainās laikā, situācijā kad kāds no šiem lielumiem ir konstants:

A Konstants, pozitīvs ātrums v. *2.5 punkti*

B Sākotnējs, pozitīvs ātrums v_0 un konstants, negatīvs spēks F. *7.5 punkti*

Grafikus jāzīmē rūpīgi, lai nepārprotami var saprast līnijas veidu - taisna horizontāla vai taisna slīpa vai izliekta, un, ja izliekta, tad uz kuru pusi. Pie katra grafika pierakstiet formulu, kas to saista ar kādu citu šeit apskatāmo fizikālo lielumu un pamato kāpēc grafiku uzzīmējāt tieši šādi.

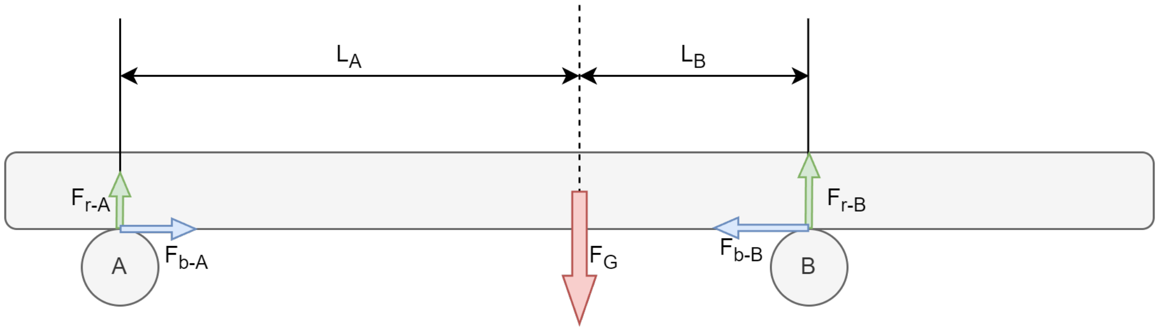

v
Vienmērīga kustība
t
s
s = v·t
t
a
a = 0
t
E
E = mv²/2
nemainās laikā
t
F
F = m·a
t
P
P = F·v
t


v
v_0
t
$v = v_0 + at = v_0 + \frac{Ft}{m}$
s
t
$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$
a
t
$F = ma$
$a = \frac{F}{m}$
E
t
$E = \frac{mv^2}{2}$
F
t
P
t
$P = F \cdot v$
T_0

Demonstrējums - Trauslais līdzsvars 10 punkti

A Novēro, ka tuvinot apakšējos zīmuļus, tie satiekas zem guļošā stieņa masas centra. Paskaidro, kāpēc tā notiek! Piemini iesaistītās parādības un vienādojumus! *4 punkti*

Redzamo situāciju aprakstīsim kā garenisku stieni, kas atrodas uz diviem atbalstiem A un B.



Uz stieni darbojas smaguma spēks $F_G = m \cdot g$. Katrs atbalsts uz stieni darbojas ar savu reakcijas spēku, F_{r-A} un F_{r-B}. Zināms, ka stienis nerotē, tātad reakcijas spēka radītie momenti ir pēc moduļa vienādi, jeb $F_{r-A} \cdot L_A = F_{r-B} \cdot L_B$. Pārveidojot vienādojumu, reakcijas spēki ir apgriezti proporcionāli atbalstu attālumam no masas centra:

$$\frac{F_{r-A}}{F_{r-B}} = \frac{L_B}{L_A}$$

Tuvinot atbalstus, tie radīs berzes spēku starp atbalstiem un stieni. Berzes spēks ir tieši proporcionāls reakcijas spēkam: $F_{b-x} = \mu F_{r-x}$. Tā kā abi atbalsti ir vienādi, berzes koeficients starp abiem atbalstiem un stieni ir vienāds.

Atbalstus virzot kopā, ar lielāku reakcijas spēku, un līdz ar ko lielāku berzes spēku, uz stieni darbosies atbalsts, kurš ir tuvāk tā masas centram. Rezultātā, pats stienis virzīsies līdz ar tuvāko atbalstu, līdz abi atbalsti ir vienādos attālumos no masas centra.

Atbalsta punktiem esot vienādos attālumos no masas centra, berzes spēki ir vienādi, un iedālā gadījumā abi atbalsti izslīdētu, stienim vienmēr paliekot pa vidu starp atbalstiem. Tomēr dzīvē, inerces un citu neprecizitāšu dēļ, izslīdošais atbalsts mainās, līdz abi atbalsti nesatiekas zem masas centra.

B Vai šādā veidā var atrast masas centru ķermenim, kura masa nav vienmērīgi sadalīta, t.i., viens gals ir smagāks par otru. Atbildi pamato! *3 punkti*

Vienīgā atšķirība ar iepriekšējo punktu ir tāda, ka situācijā, kurā berzes spēki starp atbalstiem un guļošo ķermeni ir vienādi, to attālumi no masas centra nav vienādi. Atbalsta punkts, kurš atrodas tālāk no masas centra, darbojas ar mazāku berzes spēku uz guļošo ķermeni. Zinot šos faktus, var izsecināt, ka, ja sākotnēji atbalsti atrodas abās pusēs masas centram, tad, līdzīgi kā A punktā, sākotnēji izslīdēs atbalsts, uz kuru darbojas mazāks reakcijas spēks, un, kad abi atbalsti darbojas ar vienādiem reakcijas un līdz ar to berzes spēkiem, izslīdošais atbalsts mainīsies inerces un citu neprecizitāšu dēļ.

C Vai šādā veidā varētu atrast masas centru homogēnam ķermenim, ja viens no rokās turētiem zīmuļiem būtu aptīts ar smilšpapīru. Atbildi pamato! *3 punkti*

Aptinot vienu zīmuli ar smilšpapīru, tiek palielināts berzes koeficients starp to atbalstu un guļošo stieni/cauruli.

Noteicošais fakts šajā masas centra atrašanas metodē ir tas, ka, samazinoties attālumam starp atbalstu un ķermeņa masas centru, palielinās tā atbalsta radītais berzes spēks. Šo faktu neietekmē berzes koeficients vai ķermeņa masas sadalījums.

Demonstrējums - Caurules 10 punkti

Demonstrējums tapis, pateicoties Latvijas Universitātes Cietvielu Fizikas institūtam.

A Novēro demonstrējumā, kā plūsmas ātrums ietekmē šķidrumu sajaukšanos! Paskaidro šīs atšķirības cēloņus, piemini iesaistītās fizikālās parādības un vienādojumus! *6 punkti*

Palielinoties šķidruma plūsmas ātrumam, plūsmas režīms nomainās no lamināras uz turbulentu. Laminārā plūsmā pludlīnijas ir paralēlas plūsmas vidējam ātrumam, un šķidruma slāņi nesamaisās. Lēnākā, turbulentā plūsmā šķidrumam lokāli haotiski mainās spiediens un ātruma lielums un virziens, līdz ar ko šķidruma slāņi samaisās.

Plūsmas turbulenci tuvināti apraksta Reinoldsa skaitlis - attiecība starp plūsmas inerciālajiem un viskozajiem spēkiem:

$$R_e = \frac{v\rho l}{\mu}$$

kur v ir plūsmas ātrums, ρ ir šķidruma/gāzes blīvums, l ir sistēmas raksturīgais garums un μ ir vielas viskozitāte. Lielāki Reinoldsa skaitļi atbilst turbulunetākai plūsmai.

B Kā panākt, ka šķidrumi nesajaucas arī ātrās plūsmas gadījumā, nemainot plūsmas ātrumu. Atbildi pamato! *3 punkti*

Ir nepieciešams panākt lamināru plūsmu - samazināt Reinoldsa skaitli - nesamazinot plūsmas ātrumu. Apskatot Reinoldsa skaitļa formulu, to var panākt, veicot sekojošas izmaiņas: izmantojot mazāk blīvu šķidrumu, samazinot raksturīgo garumu l (saistīts ar mikrofluīdikas kanāla šķērsgriezuma laukumu), vai izmanotojot biezāku šķidrumu, t.i. šķidrumu ar lielāku viskozitāti μ.

C Kura dimensija ir noteicošā šajā parādībā: kanāla garums vai šķērsgriezuma laukums? *1 punkti*

Noteicošā dimensija lamināras/turbulentas plūsmas pārejā ir šķērsgriezuma laukums - jo mazāks šķērsgriezuma laukums, jo mazāks raksturīgais garums l, jo laminārāka plūsma. Mazs šķērsgriezuma laukums ierobežo ātruma/spiediena fluktuācijas perpendikulāri plūsmas galvenajam virzienam.

Eksperiments - Kūstošais Aisbergs 16 punkti

Dokumentē darba gaitu, uzskatāmi veic nepieciešamos aprēķinus, datu analīzi un eksperimenta izvērtēšanu, kā arī secinājumus.

Dotie materiāli: Caurspīdīgs trauks, multimetrs, termopāra vadi.
Ūdens pieejams skolu izlietnēs, ledus gabaliņus var saņemt organizētāju telpā.
Eksperimenta veikšanai būs nepieciešams arī lineāls.

Iepazīties ar multimetra lietošanas instrukciju, mērījumu precizitāti.

A Ar multimetru temperatūras mērīšanas režīmā izmēri istabas temperatūru, nosaki absolūto un relatīvo kļūdu. *1 punkti*
Ar multimetru izmērītā gaisa temperatūra (termopāra kontaktus pievienojot pie pareizajiem kontaktiem) tika nomērītā kā $T_{gaiss} = 24°$. No multimetra instrukcijas: precizitāte pie $(-40°C\ 150°C)$ skalas ir $\pm(1\% + 4)$. Norādītā procenta kļūda ir attiecināma uz pilno skalu, t.i. $150°C - (-40°C) = 190°C$. Mērījuma absolūtā kļūda tādā gadījumā ir $\Delta T = 0.01 \cdot 190 + 4 = 5.9°C$.

B Izsaki sakarību traukā ielieta ūdens tilpumam V atkarībā no ūdens līmeņa augstuma h dotajam traukam. Ņem vērā, ka trauka diametrs nav konstants. *1 punkti*
Trauka maksimālais diametrs $d_{max} = 85mm$, minimālais diametrs $d_min = 69mm$.
Pamatkolas variants: Pieņemam, ka trauka diametrs visur ir konstants un vienāds ar vidējo diametru $d_{vid} = (d_{max} + d_{min})/2 = 77mm$. Šķersgriezuma laukums $S = 4657mm^2 = 46.57cm^2$. Ielietā šķidruma tilpums $V(h) = S \cdot h = 46.57h$
Vidusskolas variants: Trauka diametrs lineāri mainās no d_{min} pie $h = 0$ līdz d_{max} pie $h = H$, kur $H = 115mm = 11.5cm$ ir trauka augstums. Šo sakarību apraksta sekojoša formula:

$$d(h) = d_{min} + (d_{max} - d_{min})\frac{h}{H}$$

Ielietā šķidruma forma ir nošķelts konuss, kura augstums ir h, mazākais diametrs ir d_{min} un lielākais diametrs $d(h)$. Nošķelta konusa laukums ir vienāds ar:

$$V = \frac{\pi}{12}h\left(d_{min}^2 + d(h) \cdot d_{min} + d(h)^2\right)$$

Ievietojot $d(h)$, traukā ielietā šķidruma tilpumu var izteikt sekojoši. Vienkāršības labad, apzīmēsim $(d_{max} - d_{min}) = \Delta d$

$$V(h) = \frac{\pi}{12}h\left(d_{min}^2 + d_{min}^2 + d_{min}\Delta d\frac{h}{H} + d_{min}^2 + 2d_{min}\Delta d\frac{h}{H} + \Delta d^2\frac{h^2}{H^2}\right)$$

Vienkāršojot un atverot iekavas:

$$V(h) = \frac{\pi}{4}d_{min}^2 h + \frac{\pi}{4}d_{min}\Delta d\frac{h^2}{H} + \frac{\pi}{12}\Delta d^2\frac{h^3}{H^2}$$

C Uzraksti darba gaitu eksperimentam, lai noskaidrotu ledus īpatnējo kušanas siltumu L, t.i., cik daudz džoulu enerģijas nepieciešams, lai vienu kilogramu ledus pārvērstu šķidrā ūdenī. Rakstot darba gaitu un veicot eksperimentu, veic sekojošus pieņēmumus: *5 punkti*

- Nenotiek siltumapmaiņa starp ārējo vidi un sistēmu

- Ledus sākotnējā temperatūra ir $0°C$

Ledus īpatnējo kušanas siltumu nosaka, izmērot temperatūras izmaiņas ūdenim, tajā izkūstot ledum. Temperatūras izmaiņas izmanto siltuma izmaiņu aprēķināšanai, un, pielietojot enerģijas nezūdāmības likumu, aprēķina ledus uzņemto siltumu kušanas laikā. Eksperimenta darba gaita ir sekojoša:

- Trauku uzpildīt ar ūdeni, izmērīt ūdens līmeņa augstumu h_0 un temperatūru T_0.
- Traukā ielikt 2-3 ledus gabaliņus, izmērīt ūdens un ledus kopējā līmeņa augstumu h_1.
- Sekot līdzi ledus kušanai. Kad ledus ir pilnībā izkusis, izmērīt ūdens temperatūru pēc kušanas procesa T_2
- Aprēķināt ūdens un ledus masas $m_{\bar{u}}$ un m_l
- Izteikt ūdens siltuma enerģijas zudumus un ledus siltuma enerģijas guvumus
- Zinot, ka siltuma zudumi un guvumi noslēgtā sistēmā ir vienādi, aprēķināt ledus īpatnējo kušanas siltumu L
- Veikt secinājumus par eksperimenta rezultātiem, neprecizitāšu avotiem, izteikt priekšlikumus eksperimenta rezultāta uzlabošanai

D Pēc aprakstītās darba gaitas veic eksperimentu un nosaki ledus īpatnējo kušanas siltumu L. Dots, ka ūdens īpatnējā siltumietilpība $C = 4200\,Jkg^{-1}K^{-1}$, ūdens blīvums $\rho = 1000\,kgm^{-3}$. *6 punkti*
Eksperimenta gaitā tika izmērītas sekojošas vērtības (var atšķirties Jūsu eksperimentā):

- $T_0 = 26°C$
- $T_1 = 16°C$
- $h_0 = 6.5cm$
- $h_1 = 7.2cm$

Pēc B apakšpunktā izvestajiem vienādojumiem: $V_{\bar{u}} = 302.7ml$, $V_{\bar{u}+l} = 335.3ml$. Zinot, ka $m = \rho V$, $m_{\bar{u}=302.7g}$, $m_{\bar{u}+l} = 335.3g$ un $m_l = m_{\bar{u}+l} - m_{\bar{u}} = 32.6g$.
Sākotnējā ūdens siltuma zudumi:

$$Q_{zud} = m_{\bar{u}}c(T_0 - T_1)$$

Ledus kopējie siltuma guvumi. Ievēro, ka ledus saņem siltumu gan izkūstot, gan pēc tam jau ūdens formā uzsilstot no $0°T$ līdz T_1.

$$Q_{guv} = m_l L + m_l c(T_1 - 0°C)$$

No enerģijas nezūdāmības likuma zinot, ka $Q_{zud} = Q_{guv}$, īpatnējo kušanas siltumu L var izteikt kā:

$$L = \frac{m_{\bar{u}}c(T_0 - T_1) - m_l c(T_0 - 0°C)}{m_l}$$

Ievietojot iegūtās vērtības un mērījumus, šajā gadījumā $L = 3.2 * 10^5 \frac{J}{kg}$

E Veic secinājumus un priekšlikumus, kā uzlabot eksperimenta precizitāti. *3 punkti*
Iespējamie secinājumi, kas tiks ieskaitīti (var tikt pieņemti arī citi, atkarībā no argumentācijas un Jūsu iegūtajiem rezultātiem):

- Lielākais neprecizitātes avots ir siltumapmaiņa ar ārējo vidi. Atkarībā no sākotnējās temperatūras, efekts uz rezultātu var mainīties - ja ūdens temperatūŗa procesa laikā ir lielāka nekā istabas temperatūra, ūdens siltuma zudumi ir lielāki nekā ledus guvumi, un īpatnējais kušanas siltums L tiks novērtēts augstāk par faktisko vērtību. Pretējā gadījumā iegūtā L vērtība būtu zemāka, nekā dabā. Šo efektu varētu mazināt, noizolējot sistēmu(trauku) no ārējās vides ar siltumizolāciju.

- Pieņēmums, ka sākotnējā ledus temperatūra ir $0°C$, var būt nepatiess. Ja sākotnējā temperatūra ir zemāka, tad nepieciešams papildus siltums, lai ledu uzsildītu līdz kušanas temperatūrai. Šo efektu var minimizēt, ledu uzturot kontrolētā $0°C$ vidē.

- Ja ledus ir sācis kust pirms eksperimenta veikšanas, tam apkārt izveidojas šķidra ūdens kārtiņa (ledus ir slapšs), kas efektīvi mazina ledus masu eksperimentā. Šī efekta minimizēšanai ledu nepieciešams uzturēt sausā, kontrolētā $0°C$ vidē.

- Var argumentēt, ka multimetrs nav pietiekami precīzs insturments tik nelielas temperatūras izmaiņas mērīšanai, un labākus rezultātus var iegūt precīzāku temperatūras mērīšanas sistēmu.

- Maksimālai precizitātei, šo eksperimentu būtu vēlams veikt šādu procesu domātā iekārtā, t.i. kalorimetrā.